



الرياضيات المتقدمة

الصف الحادي عشر

الفصل الدراسي الثاني

كتاب الطالب

الوحدة الحادية عشرة

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

الطبعة التجريبية 1444 هـ - 2022 م

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

مطبعة جامعة كامبريدج، الرمز البريدي CB2 8BS، المملكة المتحدة.

تُشكِّل مطبعة جامعة كامبريدج جزءًا من الجامعة.
وللمطبعة دور في تعزيز رسالة الجامعة من خلال نشر المعرفة، سعيًا وراء تحقيق التعليم والتعلم وتوفير أدوات البحث على أعلى مستويات التميز العالمية.



الطبعة التجريبية ٢٠٢٢ م، طُبعت في سلطنة عُمان

هذه نسخة تمَّت مواءمتها من كتاب الطالب - الرياضيات للصف الحادي عشر - من سلسلة كامبريدج Cambridge International AS & A Level Pure Mathematics 1 - للمؤلف سو بمبرتن، و Mathematics 1 وProbability & Statistics 1 للمؤلف دين تشارلمرز و Cambridge International AS & A Level Further Mathematics للمؤلفين لي ماكلفي و مارتين كروزير.

تمَّت مواءمة هذا الكتاب بناءً على العقد المُوقَّع بين وزارة التربية والتعليم ومطبعة جامعة كامبريدج.

تمَّت مواءمة الكتاب

بموجب القرار الوزاري رقم ١٢١ / ٢٠٢٢ واللجان المنبثقة عنه







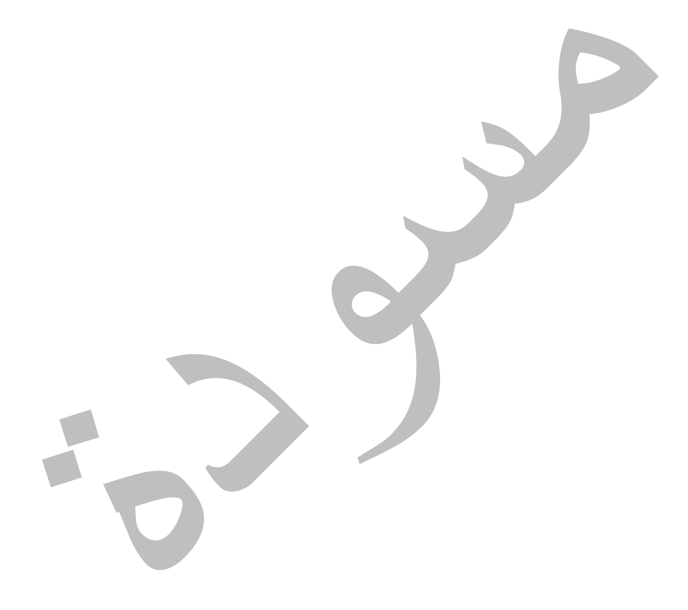
المغفور له
السلطان قابوس بن سعيد
-طيّب اللّه ثراه-





حضرة صاحب الجلالة
السلطان هيثم بن طارق المُعظَّم
-حفظه اللّه ورعاه-


مدونه
سلطنة عمان
التعليمية

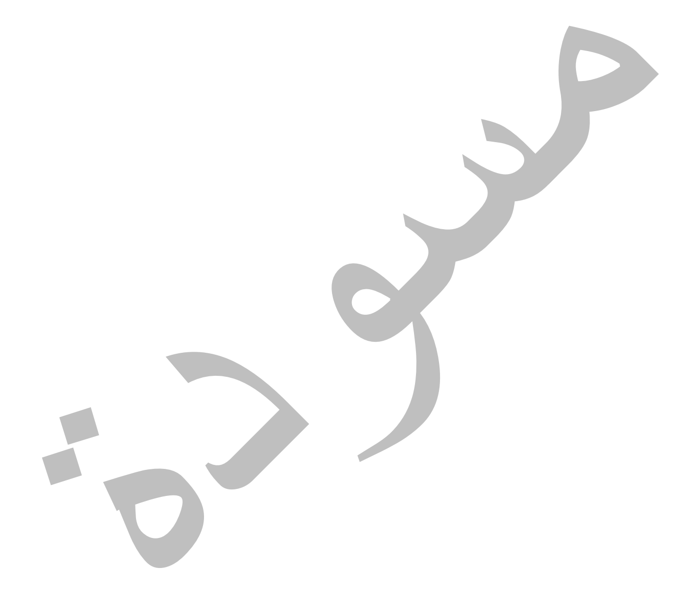

مسودة

سلطنـــة عُمـــان

(المحافظات والولايات)




مدونه
سلطنة عمان
التعليمية


مسودة





النَّشيدُ الْوَطَنِيُّ

يا رَبَّنا احْفَظْ لنا   جَلالَةَ السُّلْطان

وَالشَّعْبَ في الأَوْطان   بِالْعِزِّ والأَمان

وَلْيَدُمْ مُؤَيَّدًا   عاهِلاً مُمَجَّدًا

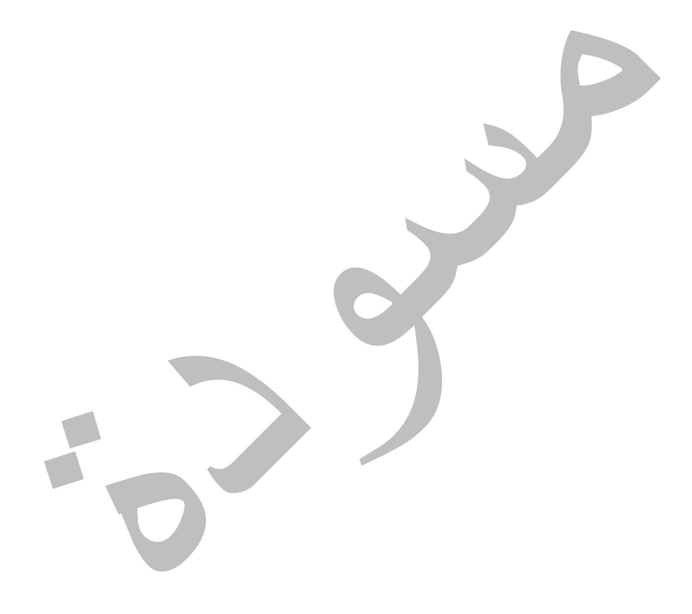
بِالنُّفوسِ يُفْتَدى

يا عُمانُ نَحْنُ مِنْ عَهْدِ النَّبي   أَوْفِياءُ مِنْ كِرامِ الْعَرَبِ

فارْتَقي هامَ السَّماء   وَامْلَئي الْكَوْنَ ضياء

وَاسْعَدي وَانْعَمي بِالرَّخاء


مدونه
سلطنة عمان
التعليمية


مسودة

تقديم

الحمد للّه رب العالمين، والصلاة والسلام على خير المرسلين، سيّدنا مُحمَّد، وعلى آله وصحبه أجمعين. وبعد:

فقد حرصت وزارة التربية والتعليم على تطوير المنظومة التعليمية في جوانبها ومجالاتها المختلفة كافة؛ لتُلبّي مُتطلّبات المجتمع الحالية، وتطلُّعاته المستقبلية، ولتتواكب مع المُستجدّات العالمية في اقتصاد المعرفة، والعلوم الحياتية المختلفة؛ بما يؤدّي إلى تمكين المخرجات التعليمية من المشاركة في مجالات التنمية الشاملة للسلطنة.

وقد حظيت المناهج الدراسية، باعتبارها مكوِّنًا أساسيًّا من مكوّنات المنظومة التعليمية، بمراجعة مستمرة وتطوير شامل في نواحيها المختلفة؛ بدءًا من المقررات الدراسية، وطرائق التدريس، وأساليب التقويم وغيرها؛ وذلك لتتناسب مع الرؤية المستقبلية للتعليم في السلطنة، ولتتوافق مع فلسفته وأهدافه.

وقد أولت الوزارة مجال تدريس العلوم والرياضيات اهتمامًا كبيرًا يتلاءم مع مستجدات التطور العلمي والتكنولوجي والمعرفي. ومن هذا المنطلق اتَّجهت إلى الاستفادة من الخبرات الدولية؛ اتساقًا مع التطوُّر المُتسارع في هذا المجال، من خلال تبنّي مشروع السلاسل العالمية في تدريس هاتَين المادّتَين وفق المعايير الدولية؛ من أجل تنمية مهارات البحث والتقصّي والاستنتاج لدى الطلاب، وتعميق فهمهم للظواهر العلمية المختلفة، وتطوير قدراتهم التنافُسية في المسابقات العلمية والمعرفية، وتحقيق نتائج أفضل في الدراسات الدولية.

إن هذا الكتاب، بما يحويه من معارف ومهارات وقيَم واتجاهات، جاء مُحقِّقًا لأهداف التعليم في السلطنة، وموائمًا للبيئة العمانية، والخصوصية الثقافية للبلد، بما يتضمَّنه من أنشطة وصور ورسوم. وهو أحد مصادر المعرفة الداعمة لتعلُّم الطالب، بالإضافة إلى غيره من المصادر المختلفة.

أتمنّى لأبنائنا الطلاب النجاح، ولزملائنا المعلّمين التوفيق فيما يبذلونه من جهود مُخلِصة، لتحقيق أهداف الرسالة التربوية السامية؛ خدمة لهذا الوطن العزيز، تحت ظل القيادة الحكيمة لمولانا حضرة صاحب الجلالة السلطان هيثم بن طارق المعظم، حفظه اللّه ورعاه.

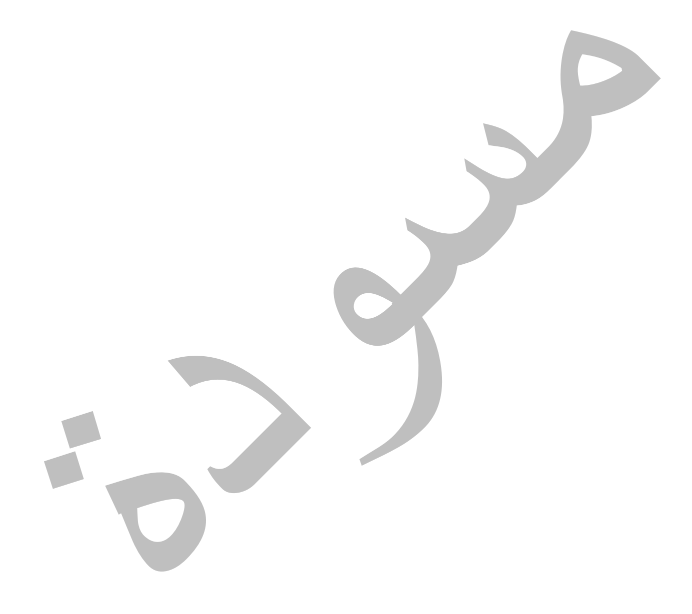
واللّه ولي التوفيق

د. مديحة بنت أحمد الشيبانية

وزيرة التربية والتعليم

موقع مدونة سلطنة عمان التعليمية www.oman-edu.com

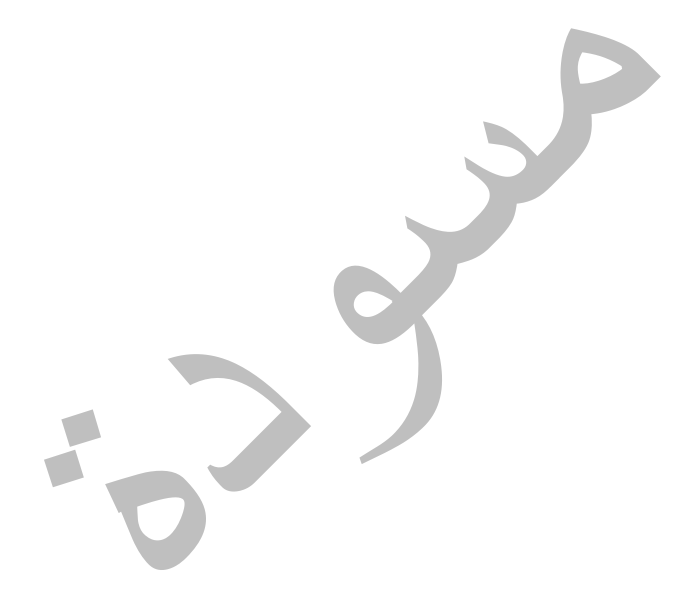




المحتويات




مدونة
سلطنة عمان
التعليمية


مسودة

المقدمة

قد تكون الرياضيات عاملًا مساعدًا في تغيير مسار حياتك. فمن ناحية نرى أن العديد من المقررات في الجامعة تتطلب أن تكون كفوءًا في الرياضيات، أو تسعى إلى استقطاب الطلبة الذين يجيدون هذه المادة. ومن ناحية أخرى، تتدرّب من خلالها على تعلم التفكير بشكل أكثر دقة ومنطقية، مع التشجيع على الإبداع أيضًا. فممارسة الرياضيات تشبه إلى حدّ بعيد ممارسة الفن، فكما يحتاج الفنان إلى إتقان أدواته (استخدام فرشاة الرسم، والقماش) وإلى فهم الأفكار النظرية (الأبعاد والألوان وما إلى ذلك)، كذلك يفعل عالم الرياضيات (باستخدام فروع الجبر والهندسة، والتي ستتعرف عليها في هذا الكتاب). لكن هذا ليس سوى الناحية العملية من الموضوع، إذ كما يأتي الفرح في الفن من الإبداع، عندما يستخدم الفنان أدواته للتعبير عن الأفكار بأساليب جديدة، كذلك يكون شعور الفرح العميق في الرياضيات عند إنجاز حلّ المسائل المطروحة.

قد تتساءل عن ماهية **المسألة الرياضية**، ولا شكّ أنه سؤال وجيه، إذ قام العديد من الأشخاص بمحاولات للإجابة عنه. وقد ترغب في تقديم جوابك الخاص عن هذا السؤال، والتفكير في كيفية تطوّره مع تقدمك في دراسة هذا الكتاب. إحدى الأفكار المحتملة أن المسألة الرياضية هي سؤال رياضي لا تعرف كيف تجيب عنه على الفور، وإلّا يصبح 'تمرينًا' لا مسألة. فالمسألة تستغرق وقتًا للإجابة عنها، وقد تضطر إلى تجربة طرائق مختلفة، باستخدام أدوات أو أفكار مختلفة، بنفسك أو مع الآخرين، حتى تكتشف أخيرًا طريقة لحلّها. وقد يطول الوقت إلى ساعات أو أيام أو حتى أسابيع لتحقيقها، لكنك في النهاية تشعر بفرح إنجاز الحلّ على الرغم من الجهد الذي بذلته.

بالإضافة إلى الأفكار الرياضية التي ستتعلمها في هذا الكتاب، فإن مهارات حلّ المسائل التي ستطورها سوف تساعدك أيضًا في مسيرة حياتك، مهما كان التخصص الذي ستختاره بعد تخرّجك. فكثيرًا ما يواجه الطلبة مسائل تحتاج إلى حل، سواء كان ذلك في العلوم أو الهندسة أو الرياضيات أو المحاسبة أو القانون أو غيرها، وسيكون شعور الثقة والعمل بشكل منهجي مفيدًا إلى أقصى الحدود.

سيدعمك هذا الكتاب لتعلم الرياضيات المطلوبة للاختبارات ولتطوير مهاراتك في حل المسائل الرياضية.

إن التواصل مع الآخرين سواءٌ عبر الكلام أو الكتابة أو الرسم هو من أهم ما يميز الإنسان، وهذا ينطبق تمامًا على الرياضيات. ألم يكن الحساب (الرياضيات) أحد أركان الفنون السبعة بحسب المفهوم اللاتيني؟ أولم يكن علماء الرياضيات العرب قديمًا يشيرون إلى الرياضيات على أنها 'فن'؟ فلا غنى عن الرياضيات لبناء جسور التواصل الإنساني، خلافًا للاعتقاد السائد بأن الرياضيات مادة جافة لا تتخطّى حدود الكتب المدرسية. والحقيقة أن التواصل الرياضي يأتي بأشكال عديدة، ومناقشة الأفكار الرياضية مع الزملاء جزء رئيسي من عمل كل عالم رياضيات. فأثناء دراستك هذه المادة، ستعمل على حل العديد من المسائل، وسيساعدك استكشافها بالتعاون مع زملائك في الفصل على تطوير فهمك وتفكيرك، بالإضافة إلى تحسين مهارات التواصل (الرياضية) لديك. وتشكل القدرة على إقناع الآخرين بصحة تفكيرك، لفظيًا أولًا ثم كتابيًا، جوهر المهارة الرياضية القائمة على 'البرهان'.

النمذجة أو التمثيل الرياضي هو المكان الذي تتقاطع فيه الرياضيات مع 'العالم الحقيقي'. ثمّة العديد من المواقف التي يحتاج فيها الإنسان إلى التوقع أو فهم ما يحدث في العالم، وفي هذا المجال تؤمّن الرياضيات كثيرًا من أدوات المساعدة. إذ ينظر علماء الرياضيات إلى عالم الواقع محاولين التعبير عن قضاياه الرئيسية في شكل معادلات، وبالتالي بناء تمثيل حقيقي له. ويستخدمون هذا التمثيل للقيام بتوقعات حيثما أمكن؛ وإذا لزم الأمر، سيحاولون تحسين التمثيل للوصول إلى توقعات أفضل. تشمل الأمثلة التوقعات بحالة الطقس، وتمثيل تغير المناخ، وعلم الطب الشرعي (لفهم حادثة ما أو جريمة)، وتمثيل التغير السكاني في ممالك الإنسان والحيوان والنبات، وتمثيل سلوك الطائرات والسفن، وتمثيل الأسواق المالية، وغيرها... وفي هذا الكتاب، سنطور الفهم والقدرة على نمذجة المحتوى رياضيًا وحل مسائل متنوعة.

يحتوي هذ الكتاب على مجموعة متنوعة من الميزات الجديدة، من أجل دعمك في عملية التعلم، منها:

- أنشطة أستكشف: تم تصميم هذه الأنشطة لتقديم مسائل للاستخدام في الفصول الدراسية التي تتطلب التفكير والمناقشات. فقد يقدّم بعض الطلبة فكرة جديدة، ويقوم بعضهم الآخر بإغناء تفكير زميلهم، بينما يمكن للآخرين دعم المقترحات. غالبًا ما تثمر الأنشطة عن نتائج أفضل إذا اقتصر العمل على مجموعات صغيرة، يجري بعدها مشاركة الأفكار مع الجميع. فهذه الطريقة تبعد الملل والرتابة عن الطلبة، وتعمد إلى تطوير مهارات حل المسائل وبناء الثقة في التعامل مع الأسئلة غير المألوفة.
- الأسئلة المصنفة برمز النجمة ' ★ ، ★ ، ★ أو ★ ' هي أسئلة تركز بشكل خاص على 'البرهان' أو 'النمذجة' أو 'حل المسائل' ولا ترتبط بهدف محدّد بل تركّز على ترابط المفاهيم بعضها ببعض، وهي مصممة لمساعدتك في التحضير الجيد على الأسلوب الجديد في الاختبارات. وربما لا تكون أسئلة أصعب من الأسئلة الأخرى الواردة في التمرين.
- تَستخدم لغة الأقسام التوضيحية عبارات مثل 'نحن' و'لنا' و'لدينا'... أكثر بكثير ممّا كانت عليه في الكتب الدراسية السابقة. هذه اللغة تحفزك على أن تكون مشاركًا نشطًا، بدلًا من أن تكون مراقبًا فقط. وهنا ما عليك سوى اتباع التعليمات ('قم بتنفيذ ذاك، ثم تنفيذ ذلك'...). إنها أيضًا الطريقة التي يكتب فيها علماء الرياضيات المحترفون معلوماتهم. وبما أن الاختبارات الجديدة قد تتضمن أسئلة غير مألوفة لديك، فكونك مشاركًا نشطًا في تعلم الرياضيات، سوف يمكّنك من التعامل مع مثل هذه الأسئلة تعاملًا أكثر نجاحًا.

توجد أيضًا في أقسام متنوعة من الكتاب، روابط إلكترونية لمصادر الرياضيات ذات الصلة، والتي يمكن العثور عليها على موقع الإنترنت المجاني undergroundmathematics.org. يهدف الموقع Uunderground Mathematics إلى إنتاج مواد غنية ومشوّقة لجميع طلبة الرياضيات. وتتّصف هذه الموارد عالية الجودة بالقدرة على تطوير مهارات التفكير الرياضي لديك، وبوفرة التقنيات في وقت واحد، لذلك نشجعك على الاستفادة منها بشكل جيد. إن استكشاف هذه المواقع الإلكترونية ليس نشاطًا إلزاميًا، ولكنه يساعد على تعزيز فهمك وعمق معرفتك بشكل كبير من خلال استكمال الأنشطة المقترحة.

ونحن إذ نتمنى لك كل النجاح، نرجو أن تكون دراستك لهذا الكتاب انطلاقة جيدة نحو مزيد من التقدم.

كيف تستخدم هذا الكتاب؟

سوف تلاحظ خلال هذا الكتاب ميزات خاصة تم تصميمها لتساعدك على التعلم.

يؤمن هذا القسم صورة مختصرة لهذه الميزات.

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

١١–١ تتذكر تعريفات المصطلحات الهندسية التي تتعلق بالنقاط، والمستقيمات، والمستويات.

١١–٢ تقرأ النقطة وتمثلها في المستوى الإحداثي ثلاثي الأبعاد.

١١–٣ تتعرف على المستويات س ص، س ع، ص ع وتستخدمها.

١١–٤ تجد نقطة المنتصف، والمسافة بين نقطتين في الفضاء ثلاثي الأبعاد.

١١–٥ تجد الزاوية بين مستقيمين، ومساحة شكل مستوي في الفضاء ثلاثي الأبعاد.

الأهداف التعليمية تدل على المفاهيم المهمة في كل وحدة وتساعدك في تصفح الكتاب بطريقة منهجية.



معرفة قبلية

المصدر	تعلمت سابقًا أن:	اختبر مهاراتك
الصف الثامن، الوحدة الثانية عشرة الصف العاشر، الوحدة الحادية عشرة	تستخدم نظرية فيثاغورث.	١) أوجِد طول الوتر في المثلث قائم الزاوية الذي فيه طولا أصغر ضلعَين يساوي ٥ سم، ١٢سم.
الصف التاسع، الوحدة السابعة، الصف الحادي عشر،	تجد نقطة المنتصف بين نقطتَين، وطول القطعة المستقيمة	٢) أوجِد نقطة المنتصف وطول القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتَين: أ (٠، ٠)، (٤، ٣)

المفردات

البُعد dimension
النقطة point
المستقيم line
القطعة المستقيمة line segment
الرأس vertex
المستوى plane
الفضاء space

معرفة قبلية تمارين حول مواضيع تعلمتها سابقًا وتحتاج إليها قبل البدء بدراسة هذه الوحدة. حاول حل التمارين لتحدد المساحات التي تحتاج إلى مراجعتها قبل تكملة الوحدة.

المفردات: هي مصطلحات مهمة ستتعلّمها داخل الوحدة.

نتيجة ١

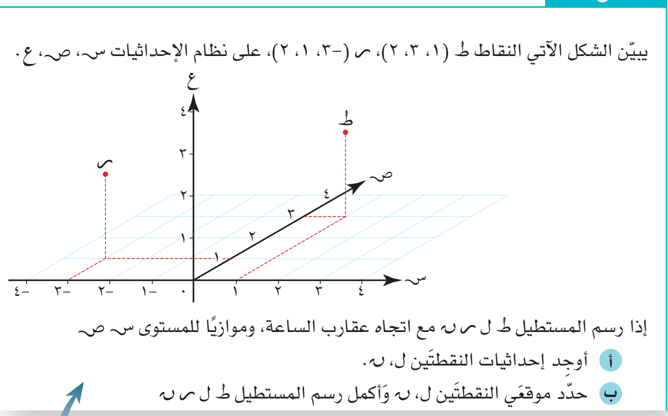
إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة حيث إحداثيات نهايتَيها هما (س، ص، ع)، (س، ص، ع) هي: $\left(\frac{س_1+س_2}{2}, \frac{ص_1+ص_2}{2}, \frac{ع_1+ع_2}{2}\right)$.

نتيجة: تم إدراجها في إطارات تحتوي على ملخص لأهم الطرائق والحقائق والصيغ.

البُعد

dimension

المفردات الأساسية هي مصطلحات مهمة في الموضوع الذي تتعلمه. تم تمييزها باللون البرتقالي الغامق. يتضمّن المحتوى تعريفات واضحة لهذه المصطلحات الأساسية.



أمثلة تؤمّن منهجية الأمثلة الإجابة عن الأسئلة خطوة خطوة. ويُظهر الجانب الأيمن خطوات الحل، بينما يحتوي الجانب الأيسر على تعليقات تشرح كل خطوة معتمدة في الحل.

استكشف ١

ناقش مع زملائك في الفصل كيف يستخدم لاعب كرة التنس الهندسة ثلاثية الأبعاد على أرض الملعب، والسبب الذي يدفع ربان الطائرة في الفضاء لاستخدام الهندسة ثلاثية الأبعاد للإلمام بالرؤية الدقيقة.

استكشف تحتوي على أنشطة دعم إضافية. تعزز هذه الأنشطة العمل الجماعي ومناقشة الأقران، كما تهدف إلى تعميق فهمك للمفهوم. (يتم توفير إجابات أسئلة الاستكشاف في كتاب دليل المعلم)

مُساعَدة

النظرية ليست هي نفسها الجانب النظري theory؛ الجانب النظري هو نظام من الأفكار يهدف إلى شرح شيء ما مثل حدث أو ظاهرة.

مساعدة: تتضمن نصائح وإرشادات مفيدة حول الحسابات أو التحقّق من الإجابات.

قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

نقطة المنتصف

نقطة منتصف القطعة المستقيمة التي إحداثيات نهايتَيها هما $(س_1، ص_1، ع_1)$، $(س_2، ص_2، ع_2)$ هي: $\left(\frac{س_1+س_2}{2}، \frac{ص_1+ص_2}{2}، \frac{ع_1+ع_2}{2}\right)$.

المسافة بين نقطتَين

طول أكبر قطر في متوازي مستطيلات أبعاده أ، ب، جـ وحدة $= \sqrt{أ^2 + ب^2 + جـ^2}$.

للقطعة المستقيمة الواصلة بين ا $(س_1، ص_1، ع_1)$، ب $(س_2، ص_2، ع_2)$، والتي نقطة منتصفها م يكون:

- $اب = \sqrt{(س_1 - س_2)^2 + (ص_1 - ص_2)^2 + (ع_1 - ع_2)^2}$
- $ام = م ب = \frac{1}{2} اب = \frac{1}{2}\sqrt{(س_1 - س_2)^2 + (ص_1 - ص_2)^2 + (ع_1 - ع_2)^2}$

المسلّمات الهندسية السبع

عند نهاية كل وحدة، توجد **قائمة تحقق من التعلم والفهم** التي تحتوي على ملخص للمفاهيم التي تمّ تناولها في الوحدة. يمكنك استخدامها للتحقق بسرعة من أنك اكتسبت الموضوعات الرئيسية.

توجد في كل وحدة تمارين متعددة تحتوي على أسئلة تدريبية. تم ترميز الأسئلة كالآتي:

- ★ تركز هذه الأسئلة على حل المسائل.
- ★ تركز هذه الأسئلة على البراهين.
- ★ تركز هذه الأسئلة على النمذجة.
- ★ تتضمّن بعض التمارين أسئلة لا ترتبط مباشرة بالهدف التعليمي المحدّد للدرس.
- ★ هذه الأسئلة مأخوذة من اختبارات سابقة.
- يجب ألّا تستخدم الحاسبة عند حل هذه الأسئلة.
- يمكنك استخدام الحاسبة عند حل هذه الأسئلة.

تمارين مراجعة نهاية الوحدة

تحتوي مراجعة نهاية الوحدة على أسئلة تحاكي الاختبار تغطي جميع الموضوعات في الوحدة. يمكنك استخدام هذه الأسئلة للتحقق من فهمك للموضوعات التي درستها.

تمارين مراجعة نهاية الوَحدة الحادية عشرة

١) دون استخدام الآلة الحاسبة، أوجِد طول القطعة المستقيمة الواصلة بين أزواج النقاط الآتية:

أ (٠، ٠، ٠) ، (٧، ٠، ٠)

ب (١، ٢، ٣) ، (١، ٥، ٣)

ج (−٢، ٥، ١١) ، (−٢، ٥، ٢)

٢) استخدم الآلة الحاسبة لتجد طول المسافة بين أزواج النقاط الآتية مقربًا إجابتك إلى أقرب منزلتَين عشريتَين:

أ (١، ٢، ٣) ، (٢، ٣، ٤)

ب (٥، ١، ٠) ، (٧، ٤، −١)

ج (٨، −٤، −٧) ، (١، ٥، ٦)

٣) متوازي مستطيلات أبعاده ٥,٦ سم، ٦,٦ سم، ٤,٢ سم.

أوجِد طول أكبر قطر لمتوازي المستطيلات مقربًا إلى أقرب منزلتَين عشريتَين.



الوحدة الحادية عشرة
الهندسة ثلاثية الأبعاد
3D Geometry

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

١١-١ تتذكر تعريفات المصطلحات الهندسية التي تتعلق بالنقاط، والمستقيمات، والمستويات.

١١-٢ تقرأ النقطة وتمثلها في المستوى الإحداثي ثلاثي الأبعاد.

١١-٣ تتعرف على المستويات سـ صـ، سـ ع، صـ ع وتستخدمها.

١١-٤ تجد نقطة المنتصف، والمسافة بين نقطتين في الفضاء ثلاثي الأبعاد.

١١-٥ تجد الزاوية بين مستقيمين، ومساحة شكل مستوي في الفضاء ثلاثي الأبعاد.

١١-٦ تتذكر تعريفَي مسلّمة ونظرية.

١١-٧ تبرهن النظريات الثلاث المرتبطة بالعلاقات الهندسية بين النقاط، والمستقيمات، والمستويات وتستخدمها.

- إذا اشترك مستويان في نقطة، فإنهما يشتركان في مستقيم.
- يشكّل مستقيم معلوم ونقطة خارجة عنه مستوى وحيدًا.
- المستقيمان المتقاطعان يشكلان مستوى وحيدًا.

المفردات

- البُعد dimension
- النقطة point
- المستقيم line
- القطعة المستقيمة line segment
- الرأس vertex
- المستوى plane
- الفضاء space
- نقطة منتصف mid-point
- المسافة distance
- المسلّمة postulate
- النظرية theorem
- المسقط projection
- المستقيمان المتخالفان skew lines

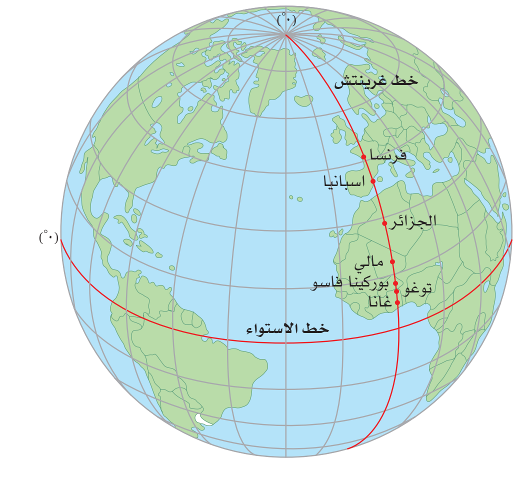
معرفة قبلية

المصدر	تعلمت سابقًا أن:	اختبر مهاراتك
الصف الثامن، الوحدة الثانية عشرة الصف العاشر، الوحدة الحادية عشرة	تستخدم نظرية فيثاغورث.	١) أوجِد طول الوتر في المثلث قائم الزاوية الذي فيه طولا أصغر ضلعَين يساوي ٥ سم، ١٢سم.
الصف التاسع، الوحدة السابعة، الصف الحادي عشر، الوحدة الخامسة	تجد نقطة المنتصف بين نقطتَين، وطول القطعة المستقيمة الواصلة بينهما.	٢) أوجِد نقطة المنتصف وطول القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتَين: أ (٠، ٠)، (٤، ٣) ب (١، −٢)، (٩، ١٣)
الصف العاشر، الوحدة الثالثة عشرة	تستخدم قانوني الجيب وجيب التمام.	٣) أطوال أضلاع مثلث هي ٩ سم، ١١سم، ١٠$\sqrt{٢}$ سم. أوجِد قياس الزاوية المقابلة للضلع الأكبر في المثلث.
الصف الحادي عشر، الوحدة الخامسة	تجد طول القطر الأكبر في متوازي المستطيلات.	٤) أوجِد طول القطر الأكبر في متوازي مستطيلات طوله ١٨ سم، وعرضه ٩ سم، وارتفاعه ٦ سم.

لماذا ندرس الهندسة ثلاثية الأبعاد؟

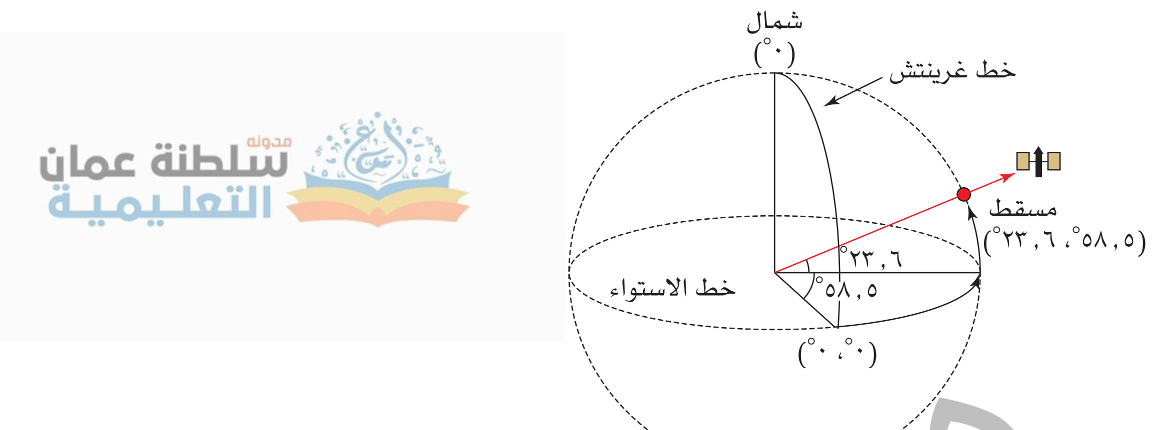
لأي مكان على سطح كوكب الأرض توجد إحداثيات تساعدنا على تحديد موقعه على خريطة العالم. النظام الإحداثي على سطح الأرض مكوّن من خطوط وهمية يُطلق عليها خطوط الطول ودوائر العرض.

خط الطول صفر هو ’خط غرينتش‘ ودائرة العرض صفر هي ’خط الاستواء‘، وهما خطّا الابتداء للنظام الإحداثي لسطح الأرض.



إحداثيات مدينة مسقط هي خط الطول ٥٨,٥° شرقًا، ودائرة العرض ٢٣,٦° شمالًا.

لتحديد موقع نقطة فوق مدينة مسقط مباشرة، كقمر صناعي مثلًا، نقدّم قياسًا ثالثًا يساعدنا على تحديد الموقع بدقة، وهذا القياس يمكن أن يكون البُعد من مركز الأرض أو البُعد عن مدينة مسقط، ويُقاس كلاهما على مسار المستقيم الأحمر في الشكل أدناه.



كما أن سائق السيارة يجب أن يكون على دراية جيدة بالأبعاد الثلاثة، خصوصًا عندما يقود سيارته أثناء أزمة سير أو عند القيادة للخلف.

الفهم الجيد لهندسة الفضاء والإلمام بالفضاء المحيط بنا مهم جدًا في هندسة العمارة، والإنشاءات، والتمثيل في ثلاثة أبعاد، وكذلك عندما نركب الدراجة أو نطلق طائرة ورقية.

استكشف ١

ناقش مع زملائك في الفصل كيف يستخدم لاعب كرة التنس الهندسة ثلاثية الأبعاد على أرض الملعب، والسبب الذي يدفع ربان الطائرة في الفضاء لاستخدام الهندسة ثلاثية الأبعاد للإلمام بالرؤية الدقيقة.





١١-١ النظام الإحداثي ثُلاثيّ الأبعاد

درست سابقًا كيفية تحديد نقطة على ورقة في بُعدَين، وذلك برسم محورَي إحداثيات متعامدَين: المحور الأفقي (المحور السيني)، والمحور الرأسي (المحور الصادي).

الهندسة ثلاثية الأبعاد هي: دراسة نقاط ومستقيمات ومستويات في نظام مكوّن من ثلاثة محاور متعامدة مع بعضها، وهي:

- المحور السيني (س)
- المحور الصادي (ص)
- محور الارتفاع (ع)

باستخدام مجموعة من القياسات الموجودة في اتجاهات المحاور الثلاثة، يمكننا تحديد نقطة المنتصف، وإيجاد المسافة بين نقطتَين، وحساب قياس الزاوية بين مستقيمَين متقاطعَين، وإيجاد مساحة الأشكال المستوية.

فيما يلي تعريفات لبعض المصطلحات التي يشيع استخدامها في الهندسة ثلاثية الأبعاد مع رسم توضيحي لكل منها:

المصطلح	التعريف	الرسم التوضيحي
النقطة point	ترمز النقطة إلى موقع محدد في الفضاء. ليس لها أبعاد ولا يمكن تقسيمها. في الرسم المقابل: النقطة ب تبعد ٣ وحدات إلى يمين النقطة و، ثم ٣ وحدات إلى خلف النقطة و ثم ٣ وحدات إلى الأعلى.	ب(٣، ٣، ٣) و(٠، ٠، ٠)
البُعد dimension	البعد هو مقدار قابل للقياس ويمتد في اتجاه واحد. يتم استخدام الكلمات الطول، والعرض، والارتفاع للدلالة على قياسات ثلاثية الأبعاد.	الارتفاع العرض الطول
المستقيم line	هو مجموعة من النقاط تمتد إلى مالانهاية في اتجاهَين متعاكسَين، وهو شكل في بُعد واحد له طول وليس له عرض، كما أنه ليس له مساحة. من هنا يمكن القول إن المنحنى ليس مستقيمًا. في الرسم المقابل مستقيم يمر بالنقطتَين ا، ب	ب ا

المصطلح	التعريف	الرسم التوضيحي
القطعة المستقيمة line segment	هي جزء متصل من مستقيم لها نقطتا بداية ونهاية، وطولها يساوي المسافة بين نقطتَي البداية والنهاية. يظهر الرسم المقابل قطعة مستقيمة واصلة بين النقطتَين ا، ب.	ب ا
على استقامة واحدة collinear	هو وصف لنقاط (نقطتَين أو أكثر) تقع على المستقيم نفسه. ومن خلال الشكل المقابل نلاحظ أن: النقاط ا، ب، ج، ى ليست على استقامة واحدة. النقاط ا، ب، ج على استقامة واحدة. النقطتان ا، ى على استقامة واحدة. النقطتان ب، ى على استقامة واحدة. النقطتان ج، ى على استقامة واحدة.	ى ا ب ج
الرأس vertex	هو نقطة تقاطع مستقيمَين أو أكثر. في الشكل المقابل، يوجد هرم لديه ٥ رؤوس تمّت الإشارة إليها بالرموز ا، ب، ج، ى، هـ.	هـ ى ج ا ب
المستوى plane	هو شكل مسطح ثنائي الأبعاد يمتد في كلتا الجهتين إلى مالانهاية حيث تقعّره وسماكته صفر وطوله وعرضه لانهائي. كما أن للمستوى مساحة، ولكن ليس له حجم. ومن الأمثلة على المستويات الهندسية أوجه كلّ من: المكعب ومتوازي المستطيلات والهرم. في حين تمثل الورقة والحائط وأرضية الغرفة وسقفها أمثلة من الحياة اليومية على المستويات.	
الفضاء Space	الفضاء هو الامتداد ثلاثي الأبعاد الذي يمكن فيه تحديد موقع جميع النقاط وجميع الأشكال باستخدام مجموعة من ثلاثة محاور للإحداثيات.	ع ص و س

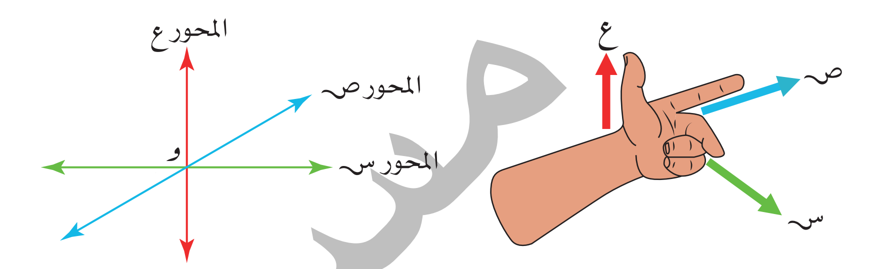
رسم المحاور وتحديد مواقع النقاط في الفضاء

في الهندسة المستوية يحدد موقع نقطة ما بزوج مرتب (س، ص). الإحداثي السيني يمثل البُعد الأفقي والإحداثي الصادي يمثل البُعد الرأسي نسبة إلى نقطة ثابتة تُسمى نقطة الأصل.

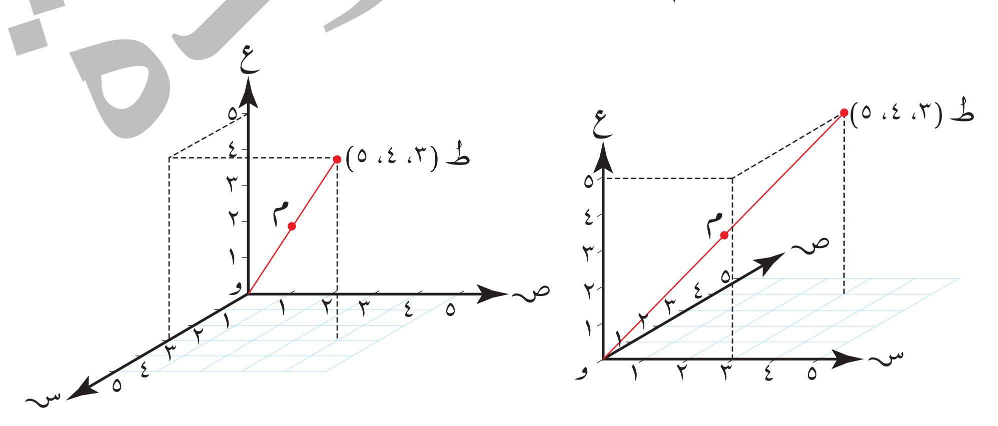
يمكن توسعة فكرة النظام الإحداثي لتحديد موقع نقطة في المستوى إلى تحديد موقع نقطة في الفضاء، حيث تمثل النقطة بثلاث إحداثيات مرتبة (س، ص، ع) حيث المحور ع يُمثل الاتجاه العمودي على المحورين السيني والصادي معًا.

في هندسة الفضاء المحاور س، ص، ع تلتقي في نقطة الأصل (٠، ٠، ٠).

يبيّن الشكل أدناه المحاور س، ص، ع والتي تذكرك بقاعدة اليد اليسرى التي درستها في مادة الفيزياء.



يمكن استخدام مجموعة المحاور لتحديد موقع أي نقطة في الفضاء نسبة إلى نقطة ثابتة تُسمى نقطة الأصل (و) يبيّن الشكلان أدناه طريقتَين لتمثيل النقطة ط (٣، ٤، ٥) على شبكة إحداثية ثلاثية الأبعاد. حيث م نقطة منتصف القطعة المستقيمة و ط.

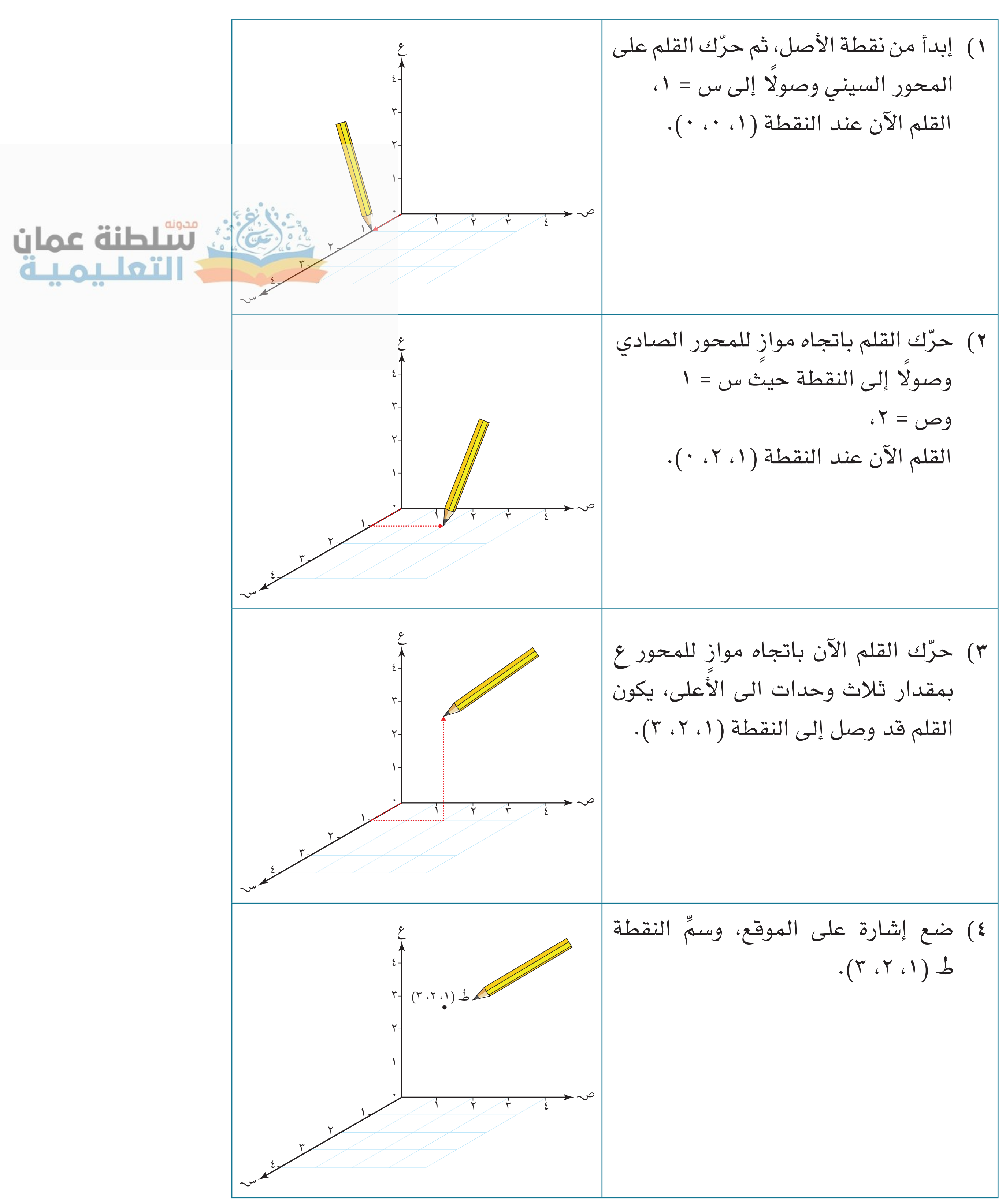


من المناسب دراسة الشكلَين أعلاه. قد تلاحظ كيف يظهر طول القطعة المستقيمة و ط مختلفًا في الشكلَين، لأننا ننظر إلى القطعة و ط من موقعَين مختلفَين.

تذكّر أن الرسوم ثلاثية الأبعاد نرسمها في مستويات ذات بُعدَين، أي على ورقة.

لتحدد موقع النقاط بدقة على المحاور س، ص، ع عادة نرسم شبكة إحداثيات في المستوى س، ص كما في الشكلَين السابقَين أعلاه.

لتحدد مثلًا موقع النقطة ط (١، ٢، ٣) بدقة، اتبع الخطوات أدناه بعد أن ترسم المحاور:



١) إبدأ من نقطة الأصل، ثم حرّك القلم على المحور السيني وصولًا إلى س = ١، القلم الآن عند النقطة (١، ٠، ٠).	
٢) حرّك القلم باتجاه موازٍ للمحور الصادي وصولًا إلى النقطة حيث س = ١ وص = ٢، القلم الآن عند النقطة (١، ٢، ٠).	
٣) حرّك القلم الآن باتجاه موازٍ للمحور ع بمقدار ثلاث وحدات الى الأعلى، يكون القلم قد وصل إلى النقطة (١، ٢، ٣).	
٤) ضع إشارة على الموقع، وسمِّ النقطة ط (١، ٢، ٣).	

انتبه بشكل خاص للخطوة ٣، تُقاس المسافة الرأسية ٣ باستخدام المقياس الذي دُرّج به المحور ع.

مستويات تتضمن زوجًا من المحاور

استكشف ٢

يبيّن الجدول الآتي إحداثيات ٩ نقاط في الفضاء:

أ	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح	ط
(٢، ٥، −٦)	(٠، ٢، ٠)	(−٣، ٠، ٤)	(٣، ٠، ٠)	(٤، ٣، −٢)	(٢، ٢، ٠)	(٠، ٠، ٧)	(٠، ١، ٥)	(١، ١، ١)

١) صنّف هذه النقاط في ثلاث مجموعات كالآتي:
المجموعة ١: تقع النقطة على واحد من المحاور الثلاثة.
المجموعة ٢: لا تقع النقطة على أي من المحاور الثلاثة.
المجموعة ٣: يمكن رسم مستقيم يمر بالنقطة ويتقاطع مع اثنَين من المحاور.

٢) بالاستناد إلى إحداثياتها، اشرح المشترك بين النقاط في كل مجموعة من المجموعات الثلاث.

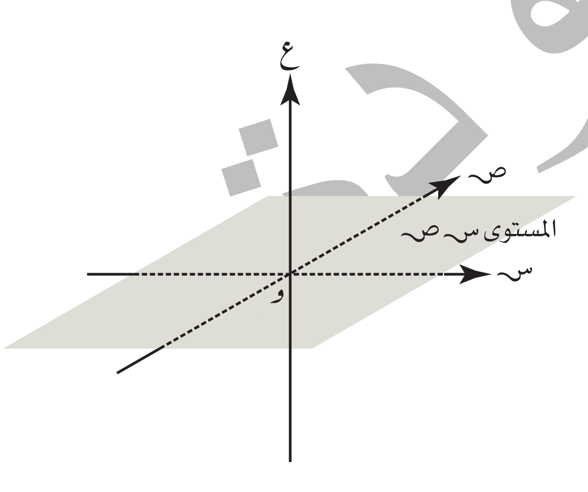
في شبكة الإحداثيات ثلاثية الأبعاد يمكن تحديد عدد لا نهائي من النقاط، ورسم عدد لا نهائي من المستقيمات، وهناك أيضًا عدد لا نهائي من المستويات على الشبكة.
المستويات الثلاثة الآتية تتكوّن من أزواج محاور الإحداثيات.

يبيّن الشكل المقابل جزءًا من المستوى الذي يتكوّن من المحورَين السيني والصادي.

جميع النقاط التي تقع في المستوى س ص يكون الإحداثي ع لها صفرًا.

مثل: (٠، ٠، ٠) و (٧، ١، ٠) و (−٣، −٨، ٠)

تقع في هذا المستوى.

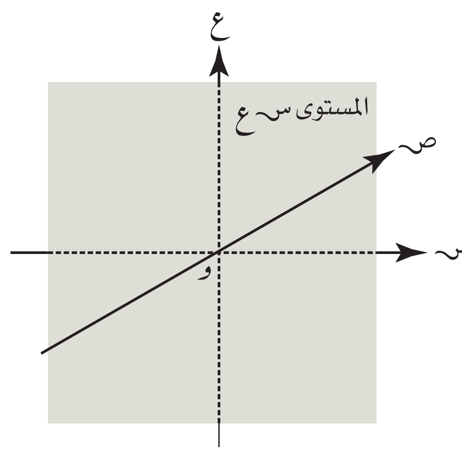


يبيّن الشكل المقابل جزءًا من مستوى يتكوّن من المحور س، ص والمحور ع.

جميع النقاط التي تقع في المستوى س ع يكون الإحداثي الصادي لها صفرًا.

مثل: (٠، ٠، ٠) و (٦، ٠، ٥) و (−٩، ٠، −٤)

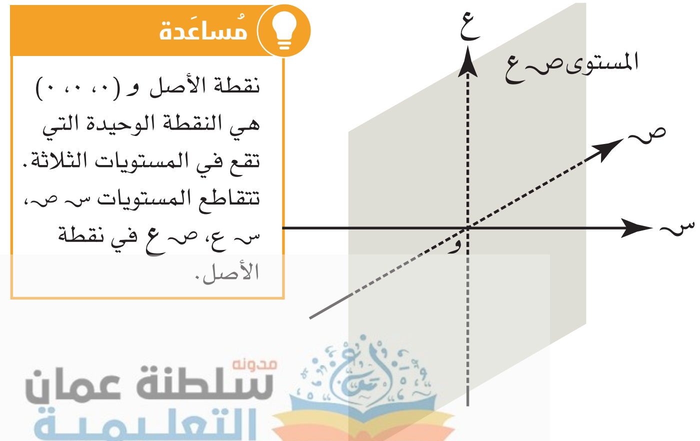
تقع في هذا المستوى.



يبيّن الشكل المقابل جزءًا من مستوى يتكوّن من المحورَين صـ، ع.

جميع النقاط التي تقع في المستوى صـ ع يكون الإحداثي السيني لها صفرًا.

مثل: (٠، ٠، ٠) و (٠، ١، ٣) و (٠، -٢، ١١) تقع في هذا المستوى.

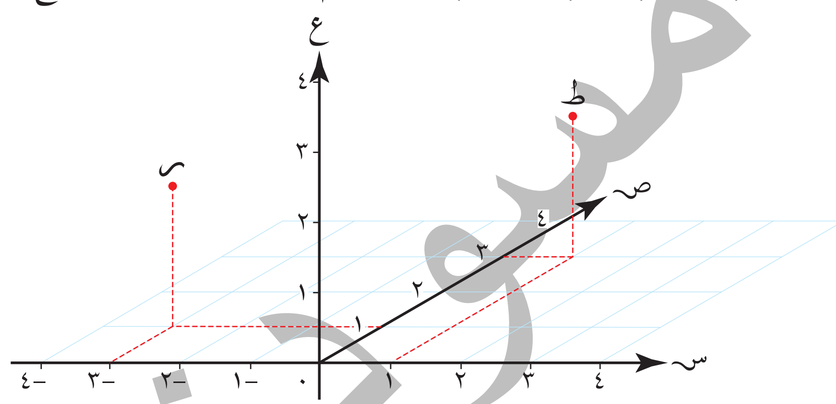


مُساعَدة

نقطة الأصل و (٠، ٠، ٠) هي النقطة الوحيدة التي تقع في المستويات الثلاثة. تتقاطع المستويات سـ صـ، سـ ع، صـ ع في نقطة الأصل.

مثــال ١

يبيّن الشكل الآتي النقاط ط (١، ٣، ٢)، م (-٣، ١، ٢)، على نظام الإحداثيات سـ، صـ، ع.



إذا رسم المستطيل ط ل م ن مع اتجاه عقارب الساعة، وموازيًا للمستوى سـ صـ

أ أوجِد إحداثيات النقطتَين ل، ن.

ب حدّد موقعَي النقطتَين ل، ن وأكمل رسم المستطيل ط ل م ن

ج أوجِد ثلاث نقاط تقع داخل المستطيل ط ل م ن، وإحداثياتها أعدادٌ صحيحة.

د اكتب إحداثيات نقطتَين تقعان على محيط المستطيل ط ل م ن، والتي تقع على المستقيم نفسه مع النقاط الثلاث في الجزئية (ج)

الحــلّ:

أ الإحداثي ع لكل من النقطتَين ل، ن هو ٢

المستطيل ط ل م ن يوازي المستوى سـ صـ، لذا يجب أن يكون الإحداثي ع للنقطتَين ل، ن متساويًا، ويساوي الإحداثي ع للنقطتَين ط، م

الإحداثي السيني والإحداثي الصادي للنقطة ل هما ١، ١ على الترتيب.

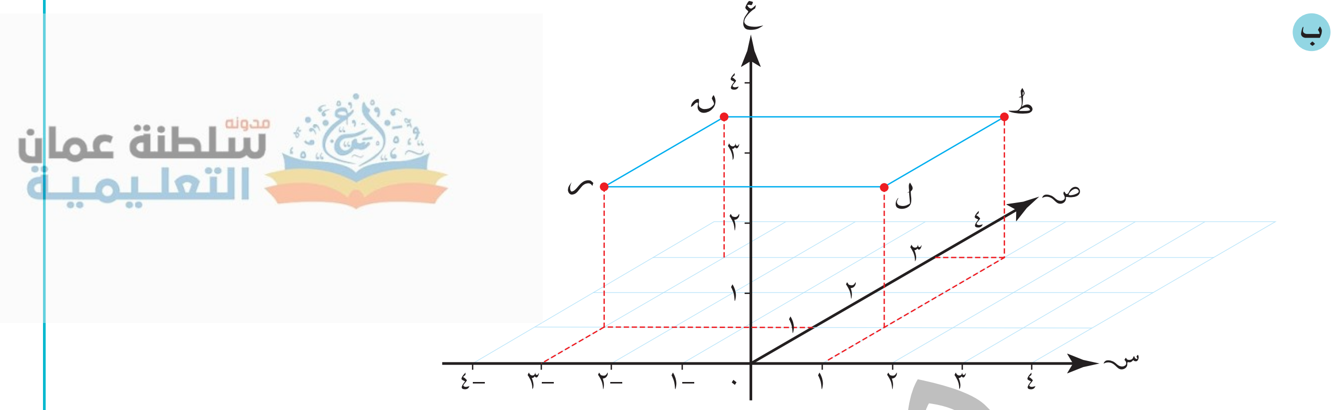
الإحداثي السيني للنقطة ل يساوي الإحداثي السيني للنقطة ط، والإحداثي الصادي لها يساوي الإحداثي الصادي للنقطة م

الإحداثي السيني والإحداثي الصادي للنقطة ن هما −٣، ٣ على الترتيب.

الإحداثي السيني للنقطة ن يساوي الإحداثي السيني للنقطة م، والإحداثي الصادي لها يساوي الإحداثي الصادي للنقطة ل

فيكون ل (١، ١، ٢)، ن (−٣، ٣، ٢)

ب



ج

إذا أُسقط ط ل م ن على المستوى س ص إلى الأسفل بمقدار وحدتَين نلاحظ ثلاث نقط داخل المستطيل. وهي النقاط المشار إليها بالنقاط (−٢، ٢، ٠)، (−١، ٢، ٠)، (٠، ٢، ٠).

النقاط في المستوى س ص هي (−٢، ٢، ٠)، (−١، ٢، ٠)، (٠، ٢، ٠).

النقاط داخل الشكل ط ل م ن هي (−٢، ٢، ٢)، (−١، ٢، ٢)، و (٠، ٢، ٢).

النقط الثلاث داخل ط ل م ن لها الإحداثيات نفسها السينية والصادية للنقاط الثلاث السابقة، لكن الإحداثي الصادي لها يساوي ٢

د إحداثيات النقطتين (−٣، ٢، ٢)، (١، ٢، ٢).

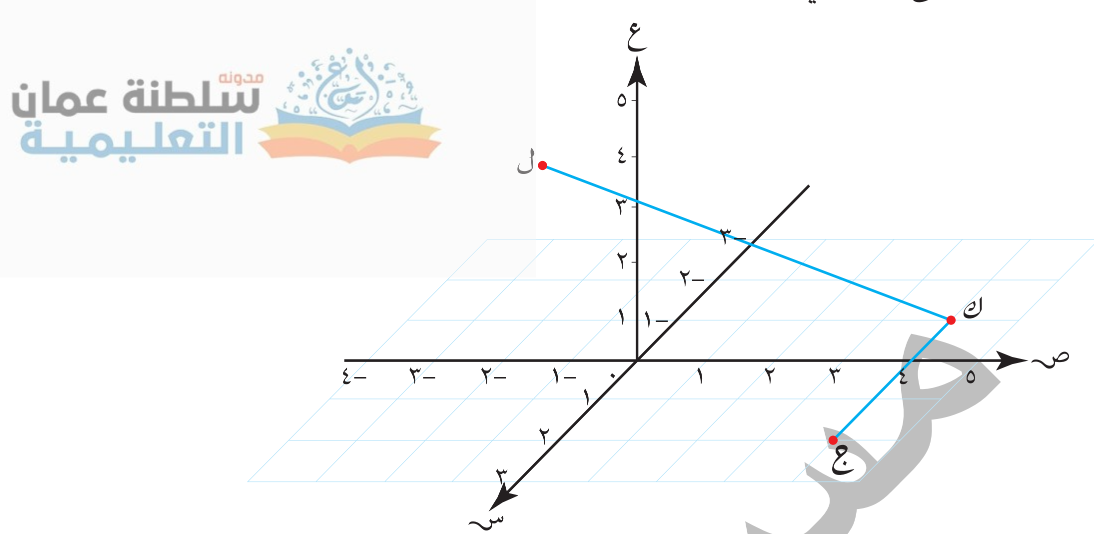
النقطتان هما نقطتا تلاقي المستقيم الذي يمر في النقاط الثلاث في الجزئية (ج) مع محيط الشكل ط ل م ن

مثــال ٢

يبيّن الشكل أدناه ثلاثة رؤوس للمستطيل ج ك ل م

إحداثيات الرؤوس الثلاثة ج (٢، ٤، ٠)، ك (−١، ٤، ٠)، ل (−١، −٢، ٣).

رُسمت القطعتان المستقيمتان ك ج، ك ل في الشكل.



أ أوجِد إحداثيات النقطة م.

ب على شبكة الإحداثيات حدّد موقع النقطة م، وأكمل رسم المستطيل ج ك ل م.

الحــلّ:

أ الإحداثي السيني للنقطة م هو ٢ ······ الإحداثي السيني للنقطة م هو الإحداثي السيني نفسه للنقطة ج

الإحداثي الصادي للنقطة م هو −٢ ······ الإحداثي الصادي للنقطة م هو الإحداثي الصادي نفسه للنقطة ل

الإحداثي ع للنقطة م هو ٣ ······ الإحداثي ع للنقطة م هو الإحداثي ع نفسه للنقطة ل

∴ إحداثيات م (٢، −٢، ٣).

ب

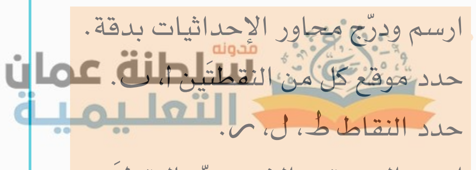
يتم رسم النقطة م عند (٢، −٢، ٣) والتي تبعد ٣ وحدات فوق النقطة (٢، −٢، ٠) في المستوى س ص

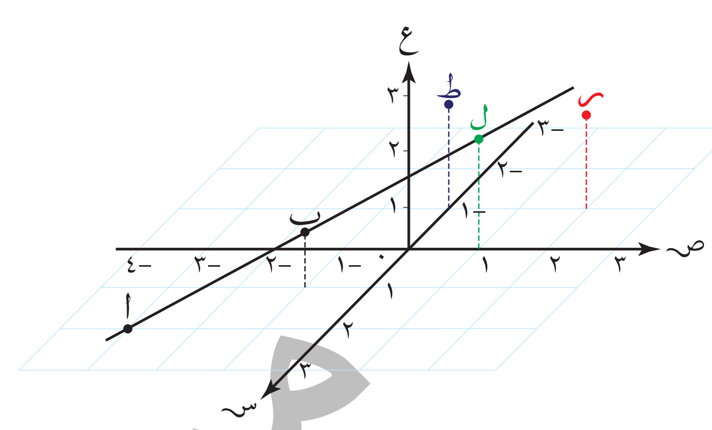
مثـــال ٣

حدد موقع النقطتَين ا(٢، −٣، ٠)، ب(١، −١، ١) على نظام إحداثيات س، ص، ع.

أي من النقاط ط(−١، ٠، ٢)، ل(−١، ٢، ٢)، ر (−١، ٢، ٢) تقع على استقامة واحدة مع النقطتَين ا ، ب؟

الحـــلّ:





ارسم ودرّج محاور الإحداثيات بدقة.
حدد موقع كل من النقطتَين ا، ب.
حدد النقاط ط، ل، ر.
ارسم المستقيم الذي يمرّ بالنقطتَين ا، ب؛ يحتوي هذا المستقيم على جميع النقاط التي تقع على استقامة واحدة مع ا، ب.

تقع النقطة ل على استقامة واحدة مع النقطتَين ا ، ب.

يمر المستقيم في النقطة ل، لكنه لا يمر في النقطة ط، ر.

تمارين ١١-١

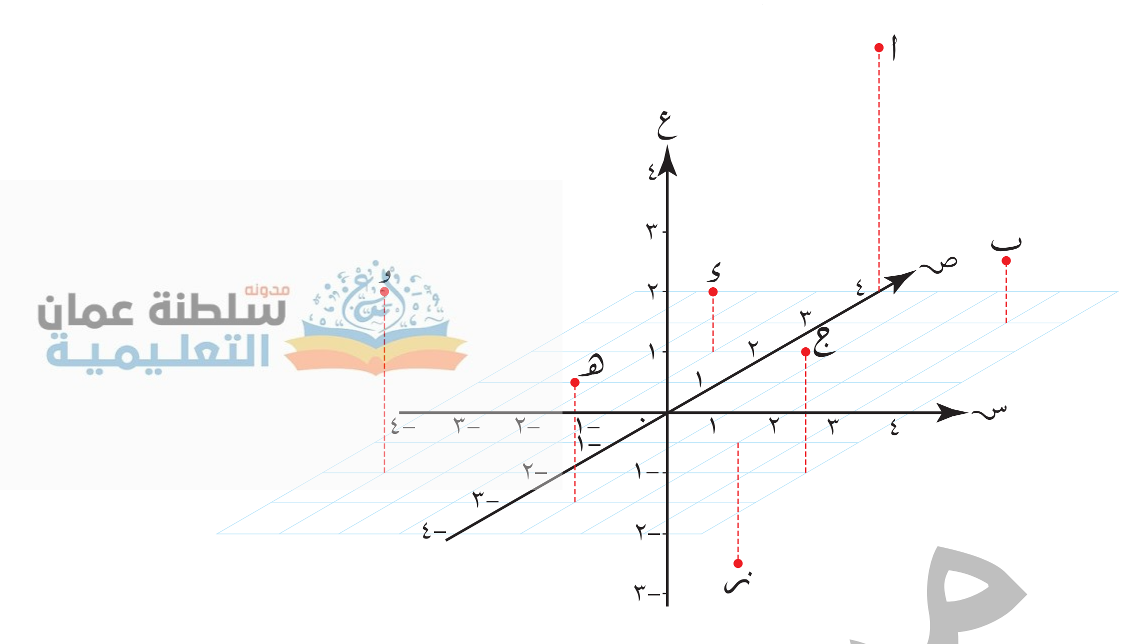
١) إحداثيات خمس نقاط هي: ا (٧، −٣، ٠)، ب (٤، ٠، −٢)، ج (−٨، ٠، ٠)، ى (١، ٢، ٣)، هـ (٠، ٤، −٥).

أ) أيُّ هذه النقاط تقع في المستوى س ص؟

ب) أيُّ هذه النقاط لا تقع في المستوى س ع؟

ج) ما اسم المستوى الذي تقع فيه النقطة هـ؟

٢) اكتب إحداثيات النقاط ا، ب، ج، د، هـ، و، ن المبينة في شبكة الإحداثيات الآتية:



٣) أ ارسم المحاور س، ص، ع، درّج كلّ منها من ٠ إلى ٥

ب حدّد مواقع النقاط ا (٠، ٠، ١)، ب (٢، ٢، ٥).

ج أيّ النقاط ط (٢، ١، ٥)، ل (١، ٢، ٣)، م (١، ١، ٣) لا تقع على استقامة واحدة مع النقطتَين ا، ب؟

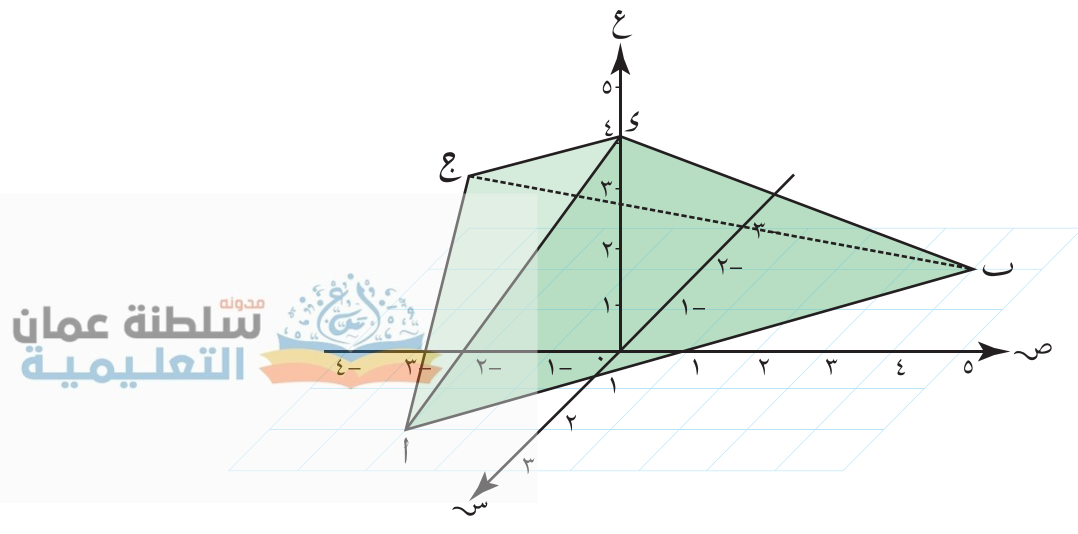
٤) أ ارسم المحورَين السيني والصادي، ودرّج كلًا منهما من ٠ إلى ٥، وارسم معهما المحور ع ودرّجه من ٠ إلى ٨

ب مثّل النقاط ط (٣، ٠، ٠)، ل(٣، ٤، ٠)، ن (٠، ٠، ٦)، على نظام الإحداثيات المرسوم في الجزئية (أ).

ج أوجِد إحداثيات النقطة م بحيث يكون الشكل ط ل م ن مستطيلًا.

د ما اسم الشكل الهندسي ط ل ت ن، إذا علمت أن ت (٠، ك، ٦) وأن ١ < ك < ٣؟

٥) يبيّن الشكل أدناه الهرم الثلاثي ا ب ى ج:



أ اكتب إحداثيات الرؤوس ا، ب، ى

ب اكتب إحداثيات الرأس ج إذا علمت أنه يبعد وحدة واحدة أعلى المستوى س ص

ج أوجِد معادلة المستقيم ا ب في صورة ص = م س + جـ

٦) ثلاثة رؤوس في المستطيل ا ب ى ج هي: ا (٧، ٢، ٥)، ب (٧، ٦، ٥)، ى (-٢، ٢، ٨). ارسم شبكة إحداثيات لتجد إحداثيات النقطة ج.

٧) أوجِد الإحداثيات بأعداد صحيحة لأربع نقاط تقع في المستوى س ع، وتبعد كل منها وحدة واحدة عن النقطة ا (٥، ٠، ٤)

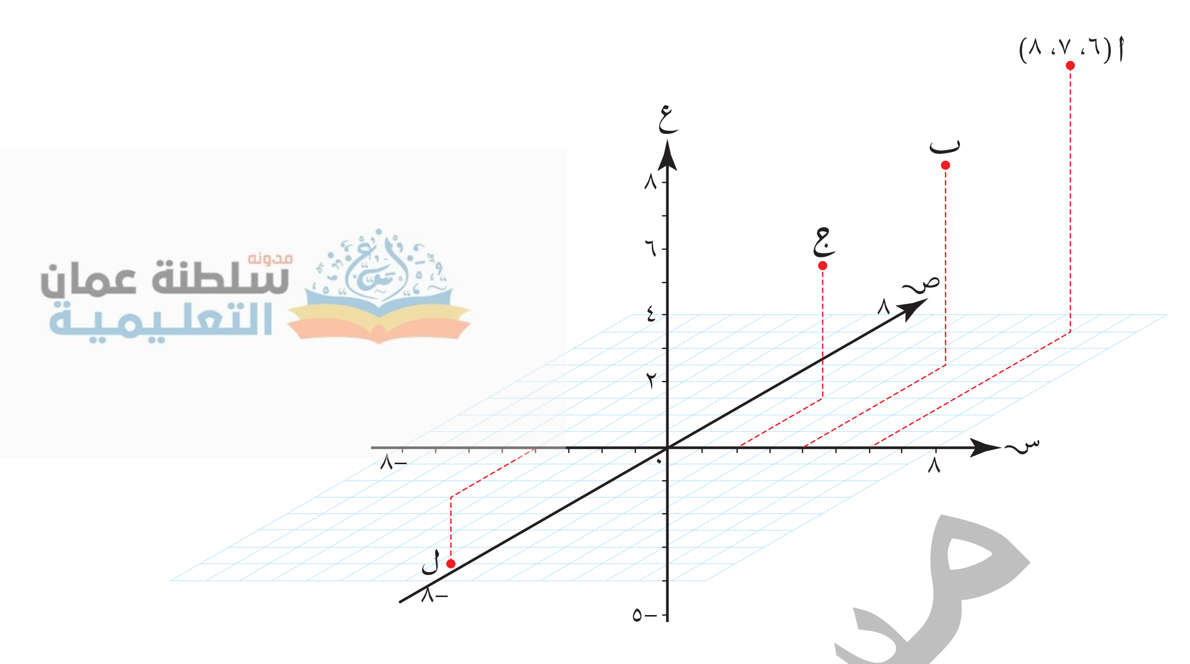
٨) رُسِم مربع في المستوى ص ع حيث ط (٠، ٣، ٤) مركز المربع، وكانت إحداثيات رؤوس المربع أعدادًا صحيحة، ويبعد كل منها عن ط مقدار ٥ وحدات.

أ كم مربعًا مختلفًا يمكنك أن ترسم؟

ب اكتب إحداثيات الرؤوس الأربعة لأيّ من هذه المربعات.

ج أوجِد مساحة المربع الناتج من الجزئية (ب).

٩) يبيّن الشكل أدناه أربع نقاط هي: ا(٦، ٧، ٨)، ب، ج، ل



أ اكتب إحداثيات كل نقطة من النقاط ب، ج، ل إذا علمت أن ا، ب، ج، ل تقع على استقامة واحدة.

ب إذا علمت أن النقطتَين ى، ف تقعان على القطعة المستقيمة الواصلة بين ا، ل ، فأوجِد إحداثيات:

١) ى إذا علمت أنها تقع في المستوى ص ع

٢) ف إذا علمت أنها تقع في المستوى س ص

ج يمكن أن تصل من النقطة ى إلى النقطة ف بالتحرك وحدتَين بالاتجاه السالب لكل من المحاور الثلاثة.

استخدم هذه المعلومات لتصف موقع النقطة (−١، ٠، ١) بالنسبة إلى موقع كل من النقطتَين ى، ف.

١١-٢ نقطة المنتصف والمسافة بين نقطتَين في الفضاء

استكشف ٣

في التمرين ١ من تمارين ١١-١ سُئلت عن النقاط الخمس:

ا (٧، −٣، ٠) ، ب (٤، ٠، −٢) ، ج (−٨، ٠، ٠) ، ى (١، ٢، ٣) ، هـ (٠، ٤، −٥).

ناقش مع زملائك ما إذا كان ممكنًا أن تحدد أي النقاط هي الأقرب إلى نقطة الأصل من دون تحديد مواقع النقاط على شبكة الإحداثيات.

إذا اعتقدت أن ذلك ممكن، فاكتب النقاط في قائمة مرتبة مبتدئًا من أقرب نقطة إلى نقطة الأصل (٠، ٠، ٠).

نقطة المنتصف

المصطلح	التعريف	الرسم التوضيحي
نقطة المنتصف midpoint	هي النقطة التي تقع في منتصف المسافة بين نقطتَي نهايتَي القطعة المستقيمة.	
نقطة الرأس apex	هي أعلى نقطة في شكل ما، أو الرأس الأبعد عن القاعدة.	
المسافة بين نقطتَين distance between two points	هي أقصر بُعد بين نقطتين على مستقيم.	
المسافة بين نقطة ومستقيم distance from a point to a line	هي أقصر مسافة يتم قياسها بين النقطة والمستقيم.	
المسافة بين نقطة ومستوى distance from a point to a plane	هي طول العمود النازل من النقطة إلى المستوى.	

في الهندسة المستوية، الإحداثيّان السيني والصادي لنقطة منتصف القطعة المستقيمة هي: الوسط الحسابي للإحداثيَّين السينيَّين والوسط الحسابي للإحداثيَّين الصاديَّين لنقطتَي نهايتَي القطعة المستقيمة.

فمثلًا، إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة ط (٧ ، −٢)، ن (−٥، ٨) هي

$\left(\frac{٧+(-٥)}{٢}، \frac{-٢+٨}{٢}\right) = (١، ٣)$

في هندسة الفضاء يمكن استخدام الأسلوب نفسه لإيجاد إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة، كما هو موضح في النتيجة ١:

نتيجة ١

إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة حيث إحداثيات نهايتَيها هما $(س_١، ص_١، ع_١)$، $(س_٢، ص_٢، ع_٢)$ هي: $\left(\frac{س_١+س_٢}{٢}، \frac{ص_١+ص_٢}{٢}، \frac{ع_١+ع_٢}{٢}\right)$.

مثال ٤

إذا علمت أن و (٠، ٠، ٠)، ط (٦، −٤، ١١)، ن (١٤، ٨، $-\frac{٧}{٣}$)، فأوجِد إحداثيات منتصف كل قطعة من القطع المستقيمة الآتية:

أ و ط

ب و ن

ج ط ن

الحلّ:

أ إحداثيات نقطة منتصف $\overline{و ط}$ هي: $\left(\frac{٦}{٢}، \frac{-٤}{٢}، \frac{١١}{٢}\right) = \left(٣، -٢، \frac{١١}{٢}\right)$

يمكن أن نكتب الإجابة هكذا (٣، −٢، ٥٫٥)

ب إحداثيات نقطة منتصف $\overline{و ن}$ هي: $\left(\frac{١٤}{٢}، \frac{٨}{٢}، \frac{-\frac{٧}{٣}}{٢}\right) = \left(٧، ٤، -\frac{٧}{٦}\right)$

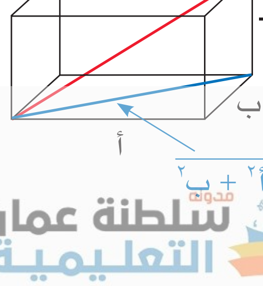
ليس مناسبًا أن تقرب الإحداثيات في إجابة الجزئيتَين (ب)، (ج): فالإحداثيات (٧، ٤، −١٫٦٧)، (١٠، ٢، ٤٫٣٣) ليست إجابة دقيقة.

ج إحداثيات نقطة منتصف $\overline{ط ن}$ هي: $\left(\frac{١٤+٦}{٢}، \frac{٨+(-٤)}{٢}، \frac{-\frac{٧}{٣}+١١}{٢}\right)$

$= \left(١٠، ٢، \frac{١٣}{٣}\right)$

المسافة بين نقطتَين

تعلّمت في وحدة حساب المثلثات في الصف العاشر، أن تستخدم نظرية فيثاغورث لتحل مسائل في الهندسة المستوية؛ وبإجراء تعديل بسيط يمكنك أن تستخدم نظرية فيثاغورث في هندسة الفضاء أيضًا.

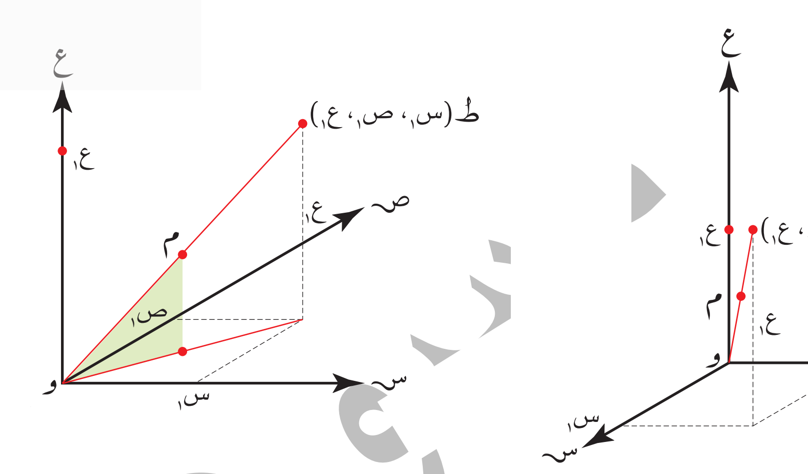


يوضح الشكل المقابل أن طول أكبر قطر في متوازي المستطيلات الذي أبعاده أ، ب، جـ وحدة هو $\sqrt{أ^2 + ب^2 + جـ^2}$ وحدة.

يبيّن الشكل أدناه رسمَين لقطعة مستقيمة رُسمت من نقطة الأصل (٠، ٠، ٠) إلى النقطة ط $(س_1، ص_1، ع_1)$. نقطة منتصف القطعة المستقيمة و ط هي م كما هو موضح في الشكلَين الآتيين:







نستخدم نظرية فيثاغورث لنجد طول المسافة بين النقطتَين و، ط:

و ط = $\sqrt{س_1^2 + ص_1^2 + ع_1^2}$.

المسافة من النقطة و إلى منتصف القطعة المستقيمة م تساوي نصف طول القطعة المستقيمة و ط، فيكون:

$$و م = \sqrt{\left(\frac{س_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{ص_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{ع_1}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}\left(س_1^2 + ص_1^2 + ع_1^2\right)}$$

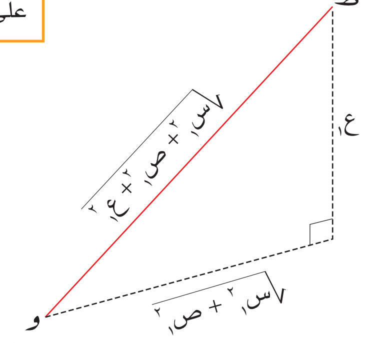
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left(س_1^2 + ص_1^2 + ع_1^2\right)}$$

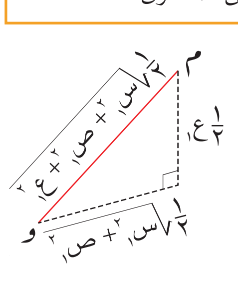
$$= \frac{1}{2} و ط$$

مُساعَدة

مسقط القطعة المستقيمة على مستوى هو: القطعة المستقيمة المحصورة بين موقعي العمودين النازلين من طرفي القطعة المستقيمة على المستوى.

باستخدام تشابه المثلثَين في الشكل السابق، حيث أُسقطت القطعتان و م، و ط رأسيًا على المستوى س ص



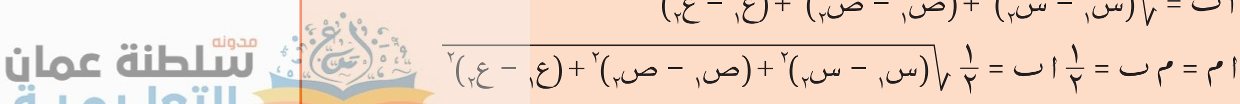


نتيجة ٢

طول القطر الأكبر في متوازي المستطيلات الذي أبعاده أ، ب، ج وحدة يساوي $\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2 + \text{ج}^2}$ وحدة.

- للقطعة المستقيمة الواصلة بين ا (س١، ص١، ع١)، ب (س٢، ص٢، ع٢) ونقطة المنتصف لها م، يكون:

$$\text{اب} = \sqrt{(\text{س}_1 - \text{س}_2)^2 + (\text{ص}_1 - \text{ص}_2)^2 + (\text{ع}_1 - \text{ع}_2)^2}$$



- $\text{ام} = \text{م ب} = \frac{1}{2}\,\text{اب} = \frac{1}{2}\sqrt{(\text{س}_1 - \text{س}_2)^2 + (\text{ص}_1 - \text{ص}_2)^2 + (\text{ع}_1 - \text{ع}_2)^2}$

مثــال ٥

إذا علمت أن النقطة م منتصف القطعة المستقيمة ط ن، حيث ط (٥، −٢، ٣)، ن (٧، ٦، −١١)، فأوجد:

أ إحداثيات النقطة م
ب البُعد بين نقطة الأصل والنقطة م
ج طول القطعة المستقيمة ط ن
د طول القطعة المستقيمة ط م

الحــلّ:

أ إحداثيات النقطة م هي: $\left(\frac{5+7}{2}، \frac{-2+6}{2}، \frac{3+(-11)}{2}\right) = (6، 2، -4)$

ب و م $= \sqrt{6^2 + 2^2 + (-4)^2}$

$= \sqrt{36 + 4 + 16}$

$= \sqrt{56}$

$= 2\sqrt{14} \cong 7{,}48$ وحدة

استخدم نظرية فيثاغورث في الفضاء مع إحداثيات النقطة م

ج ط ن $= \sqrt{(5-7)^2 + (-2-6)^2 + (3-(-11))^2}$

$= \sqrt{4 + 64 + 196}$

$= \sqrt{264}$

$= 2\sqrt{66} \cong 16{,}25$ وحدة.

استخدم نظرية فيثاغورث في الفضاء.

مُساعَدة

عندما نحسب المسافة بين نقطتَين فإن الترتيب الذي نطرح فيه الإحداثيات س، ص، ع ليس مهمًا لأننا نربّع هذه الفروق: فمثلًا، $(5-9)^2 = (9-5)^2 = 16$

د ∵ النقطة م منتصف القطعة المستقيمة ط ن،

∴ م ط $= \frac{1}{2}$ ط ن

$= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{66}$

$= 8{,}12$ وحدة

طريقة بديلة: نعلم أن ط (٥، −٢، ٣)، م (٦، ٢، −٤)

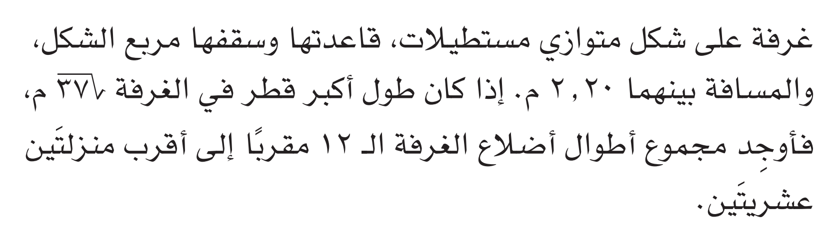
م ط $= \sqrt{(5-6)^2 + (-2-2)^2 + (3-(-4))^2}$

$= \sqrt{1 + 16 + 49}$

$= \sqrt{66} = 8{,}12$

مثــال ٦

غرفة على شكل متوازي مستطيلات، قاعدتها وسقفها مربع الشكل، والمسافة بينهما ٢,٢٠ م. إذا كان طول أكبر قطر في الغرفة $\sqrt{٣٧}$ م، فأوجِد مجموع أطوال أضلاع الغرفة الـ ١٢ مقربًا إلى أقرب منزلتَين عشريتَين.



الحــلّ:

لنفرض أن طول ضلع المربع هو س

$س^٢ + س^٢ + (٢,٢٠)^٢ = (\sqrt{٣٧})^٢$ .... استخدم قانون طول أكبر قطر.

$٢س^٢ + ٤,٨٤ = ٣٧$

$س^٢ = \frac{٣٧ - ٤,٨٤}{٢}$

$س = \sqrt{١٦,٠٨}$

مجموع أطوال الأضلاع = $٨\sqrt{١٦,٠٨} + ٤ \times ٢,٢٠$ .... ثمانية من الأضلاع طول كل منها $\sqrt{١٦,٠٨}$ وأربعة أضلاع طول كل منها ٢,٢ م

= ٤٠,٨٨ م

تمارين ١١-٢

١) أوجِد إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين كل نقطتَين من النقاط الآتية:

أ (١٢، −٦، ٥) ، (٠، ٠، ٠)

ب (٩، ٥، ٢) ، (١١، −٧، ٨)

ج (٤، −١٣، ٢) ، (−٤، ١٥، −٣)

٢) إذا علمت أن إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة طـ ن هي (٣، −٥، ٢)، وإحداثيات طـ (٧، ٠، −٤)، فأوجِد:

أ إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين طـ ونقطة الأصل.

ب إحداثيات النقطة ن

٣) دون استخدام الآلة الحاسبة، أوجِد المسافة بين كل نقطتَين من النقاط الآتية:

أ (٠، ٠، ٠) ، (٠، ٥، ٠)

ب (٣، ٢، ١) ، (−١، ٢، ١)

ج (٦، −٢، −٥) ، (٦، −٢، ٥)

٤) أوجِد المسافة بين كل نقطتَين من النقاط الآتية:

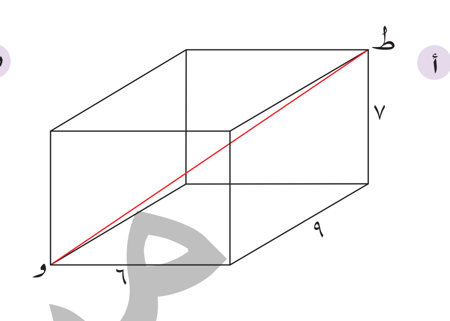
أ (٢، ٥، ٤) ، (٤، ١، ٧)

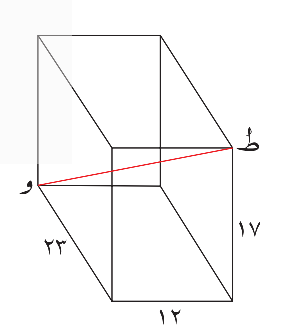
ب (١، ٢، −١) ، (٦، ٣، ١)

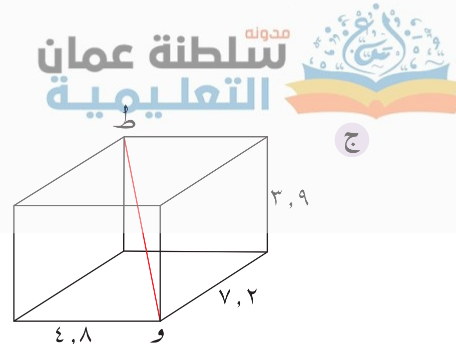
ج (−٤، ٦، −٥) ، (٣، ٢، ٤)

٥) يبيّن كل شكل من الأشكال أدناه منشورًا قاعدته مستطيلة، والقطر الأكبر فيه هو $\overline{وط}$.

أوجِد طول وط مقربًا إلى أقرب ٣ أرقام معنوية:

أ


ب


ج


٦) أوجِد طول أكبر قطر لكل ممّا يأتي، مقرّبًا إجابتك إلى أقرب منزلتَين عشريتَين:

أ مكعب طول ضلعه ١ سم.

ب مكعب طول ضلعه ٨ سم.

ج متوازي مستطيلات ارتفاعه ١٠ سم، وقاعدته مربع طول ضلعه ٦ سم.

د متوازي مستطيلات أبعاده ١,٢ سم، ٣,٤ سم، ٥,٦ سم.

٧) أوجِد إحداثيات نقطة المنتصف، وطول القطعة المستقيمة الواصلة بين كل نقطتَين مما يأتي:

أ (٥، ٨، ١٢) ، (٧، ٤، ٠)

ب (١، ١١، −٣) ، (٧، −١، ٣)

ج (٨، −٥، ٦) ، (١١، −٨، −٢)

د $\left(\frac{٣}{٤}، \frac{٤}{٣}، −١\right)$ ، $\left(−\frac{١١}{٢}، \frac{٣}{٢}، ٠\right)$

٨) بُعدا قاعدة متوازي مستطيلات ١٥ سم، ١٣ سم. إذا كان طول أكبر قطر فيه $\sqrt{٨٣٥}$ سم، فأوجِد ارتفاعه.

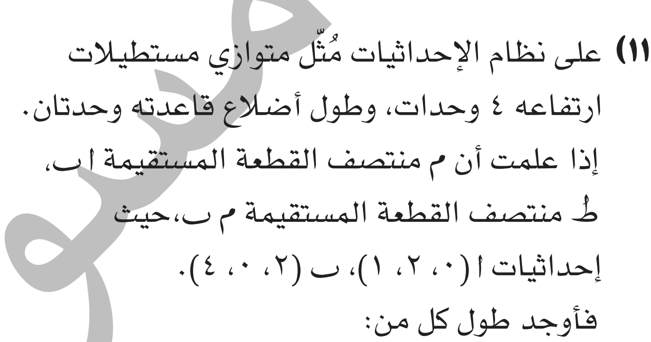
٩) صندوق مكعب الشكل حجمه ٤٤١,٢٦٢ سم^{٣}. أوجِد طول أكبر قطر فيه، مقرّبًا إجابتك إلى أقرب منزلتَين عشريتَين.

١٠) في متوازي المستطيلات المقابل: م منتصف القطر و ج، حيث و ا = ٦ سم، ان = ن ب = ٤ سم، ب ج = ٥ سم.
رُسِم الشكل على نظام إحداثيات س، ص، ع، بحيث كان و (٠، ٠، ٠)، ا على المحور السيني الموجب، $\overline{\text{ج ب}}$ يوازي المحور ع

أ ما المحور الذي توازيه $\overline{\text{ا ب}}$؟

ب أوجِد إحداثيات كل نقطة من النقاط الآتية:
١) ا ٢) ب ٣) ج ٤) م

ج إذا قرّبت كل ناتج إلى أقرب منزلتين عشريتين، فاحسب المسافة من:
١) و إلى ج ٢) م إلى و
٣) م إلى ا ٤) ن إلى م





١١) على نظام الإحداثيات مُثّل متوازي مستطيلات ارتفاعه ٤ وحدات، وطول أضلاع قاعدته وحدتان.
إذا علمت أن م منتصف القطعة المستقيمة ا ب، ط منتصف القطعة المستقيمة م ب، حيث إحداثيات ا (٠، ٢، ١)، ب (٢، ٠، ٤).
فأوجِد طول كل من:

أ $\overline{\text{ا ب}}$

ب $\overline{\text{ا م}}$

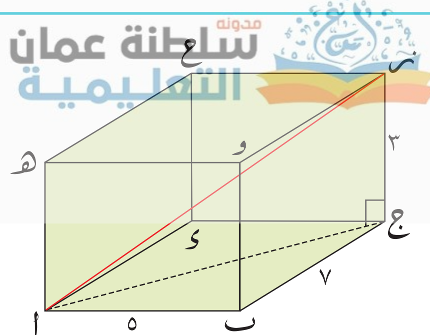
ج $\overline{\text{ا ط}}$

١١-٣ الزوايا والمساحات في الفضاء

درست سابقًا كيفية إيجاد أطوال المستقيمات المتقاطعة، ويمكننا أن نستخدم علم المثلثات لحساب قياس الزوايا بين هذه المستقيمات إضافة إلى مساحة الأشكال المستوية المحصورة بين ثلاثة أو أربعة مستقيمات متقاطعة، وستستخدم في هذا الدرس حل المثلثات وإيجاد قياسات الزوايا وأطوال الأضلاع والمساحات في الفراغ كما يتضح من الأمثلة الآتية.

مثال ٧

يبيّن الشكل المقابل متوازي مستطيلات أبعاده ٥ سم، ٧ سم، ٣ سم. أوجد:



أ طول القطر الأكبر $\overline{\text{أ ن}}$ مقربًا إلى أقرب منزلتَين عشريتَين.

ب قياس الزاوية بين القطر الأكبر $\overline{\text{أ ن}}$، وَقطر القاعدة $\overline{\text{أ ج}}$.

الحــلّ:

أ $(\text{أ ج})^2 = (\text{أ ب})^2 + (\text{ب ج})^2$ ...... (١)

المثلث أ ب ج قائم الزاوية في قاعدة متوازي المستطيلات.

$(\text{أ ن})^2 = (\text{أ ج})^2 + (\text{ج ن})^2$ ...... (٢)

المثلث أ ج ن قائم الزاوية موجود داخل متوازي المستطيلات وتره هو القطر الأكبر $\overline{\text{أ ن}}$ ($\overline{\text{أ ج}}$ مسقط $\overline{\text{أ ن}}$ على القاعدة).

$(\text{أ ن})^2 = (\text{أ ب})^2 + (\text{ب ج})^2 + (\text{ج ن})^2$

$\text{أ ن} = \sqrt{(\text{أ ب})^2 + (\text{ب ج})^2 + (\text{ج ن})^2}$

$= \sqrt{5^2 + 7^2 + 3^2}$

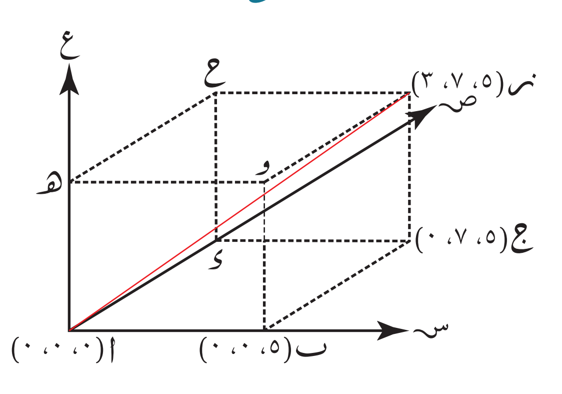
$= \sqrt{83}$

$= 9{,}11$ سم.

عوّض عن المعادلة (١) في المعادلة (٢) لتحل مكان $(\text{أ ج})^2$.
يبيّن ذلك أنه ليس ضروريًا أن تحسب طول $\overline{\text{أ ج}}$
إن عدم حساب طول $\overline{\text{أ ج}}$ مباشرة يجنّبك حصول خطأ غير ضروري عند التقريب.

طريقة بديلة:

يمكن حل الجزئية (أ) بأن ترسم متوازي المستطيلات على شبكة الإحداثيات بحيث تقع أ عند نقطة الأصل، ب (٥، ٠، ٠)، ج (٥، ٧، ٠)، ن (٥، ٧، ٣) وهكذا.



$$\text{ا ن} = \sqrt{(٥ - ٠)^٢ + (٧ - ٠)^٢ + (٣ - ٠)^٢}$$
$$= \sqrt{٥^٢ + ٧^٢ + ٣^٢}$$
$$= \sqrt{٨٣}$$
= ٩,١١ سم.

ب جا($\hat{\text{ن ا ج}}$) = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{ج ن}}{\text{ا ن}}$

$= \frac{٣}{\sqrt{٨٣}}$

في شكل متوازي المستطيلات الأول الزاوية ن ا ج هي الزاوية ا المحصورة بين $\overline{\text{ا ن}}$، $\overline{\text{ا ج}}$ المثلث ا ج ن قائم الزاوية في ج استخدم معكوس الجيب لتجد قياس الزاوية ن ا ج

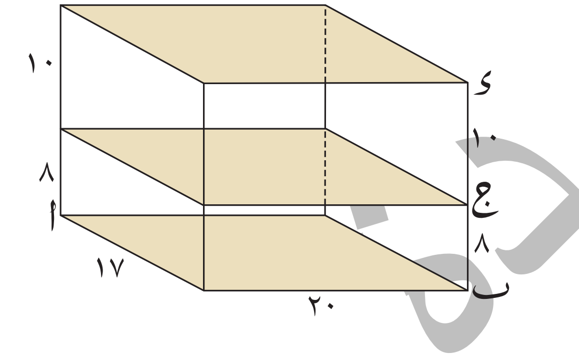
قياس $\hat{\text{ن ا ج}}$ = جا$^{-١}$ $\frac{٣}{\sqrt{٨٣}}$

= ١٩,٢°

يمكنك إيجاد قياس الزاوية ن ا ج باستخدام ظل الزاوية أو جيب التمام مع طول الضلع ا ن

مثــال ٨

يبيّن الشكل الآتي طاولة مكوّنة من ثلاثة أسطح مستطيلة متطابقة (القياسات معطاة بالسنتيمتر).



أ أوجِد المسافة مقربة إلى أقرب منزلتَين عشريتَين:

١) من ا إلى ج.

٢) من ا إلى ء.

ب أوجِد قياس الزاوية المحصورة بين $\overline{\text{ا ج}}$، $\overline{\text{ا ء}}$ مقربًا إلى أقرب منزلة عشرية واحدة.

الحـلّ:

أ ١) $\text{ا ج} = \sqrt{١٧^٢ + ٢٠^٢ + ٨^٢}$

$= \sqrt{٧٥٣}$

= ٢٧,٤٤ سم

استخدم نظرية فيثاغورث في الفضاء لتجد المسافة من ا (٠، ٠، ٠) إلى ج (١٧، ٢٠، ٨).

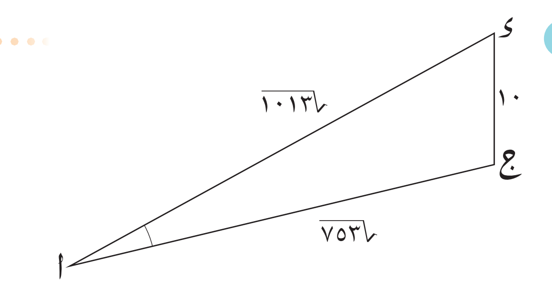
٢) $\text{ا ء} = \sqrt{١٧^٢ + ٢٠^٢ + ١٨^٢}$

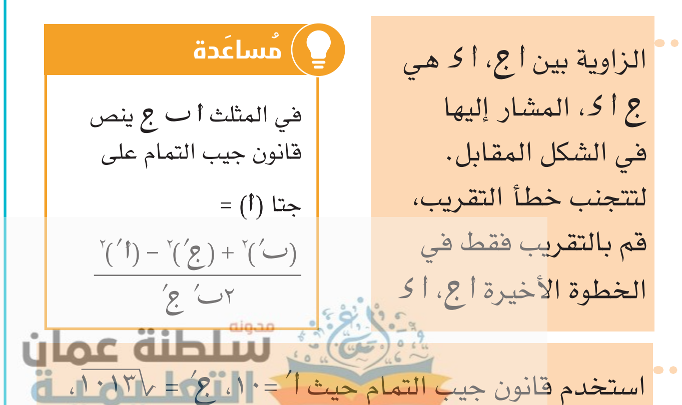
$= \sqrt{١٠١٣}$

= ٣١,٨٣ سم.

استخدم نظرية فيثاغورث في الفضاء لتجد المسافة من ا (٠، ٠، ٠) إلى ء (١٧، ٢٠، ١٨).

ب





مُساعَدة

في المثلث أ ب ج ينص قانون جيب التمام على

جتا (أ) = $\frac{(\text{ب}')^2 + (\text{ج}')^2 - (\text{أ}')^2}{2\,\text{ب}'\,\text{ج}'}$

الزاوية بين أ ج، أ د هي ج أ د، المشار إليها في الشكل المقابل. لتتجنب خطأ التقريب، قم بالتقريب فقط في الخطوة الأخيرة أ ج، أ د

استخدم قانون جيب التمام حيث أ′ = ١٠، ج′ = $\sqrt{1013}$، د′ = $\sqrt{753}$

$$\text{جتا}\,(\text{ج}\hat{\text{أ}}\text{د}) = \frac{\text{ج}'^2 + \text{د}'^2 - \text{أ}'^2}{2\,\text{ج}'\,\text{د}'}$$

$$= \frac{(\sqrt{1013})^2 + (\sqrt{753})^2 - 10^2}{2\sqrt{1013} \times \sqrt{753}}$$

$$= \frac{1013 + 753 - 100}{2\sqrt{1013 \times 753}}$$

$$= \frac{833}{\sqrt{762789}}$$

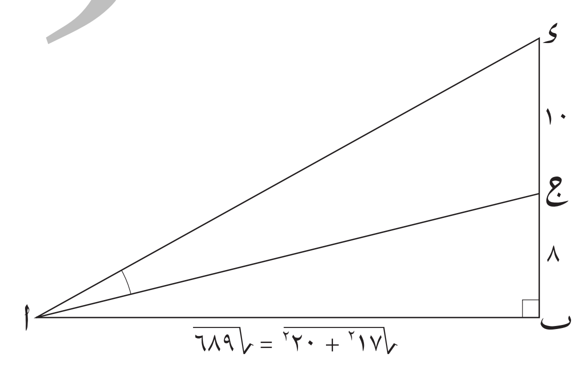
استخدم معكوس جيب التمام لتجد قياس $\hat{\text{أ}}$

$$\text{ق}\,(\text{ج}\hat{\text{أ}}\text{د}) = \text{جتا}^{-1}\left(\frac{833}{\sqrt{762789}}\right)$$

$$= 17{,}5°$$

طريقة بديلة:

قياس الزاوية ج $\hat{\text{أ}}$ د يساوي الفرق بين قياسَي الزاويتين ب $\hat{\text{أ}}$ د، ب $\hat{\text{أ}}$ ج.



$$\text{ق}\,(\text{ج}\hat{\text{أ}}\text{د}) = \text{ق}\,(\text{ب}\hat{\text{أ}}\text{د}) - \text{ق}\,(\text{ب}\hat{\text{أ}}\text{ج})$$

$$= \text{ظا}^{-1}\,\frac{18}{\sqrt{689}} - \text{ظا}^{-1}\,\frac{8}{\sqrt{689}}$$

$$= 17{,}5°$$

مثــال ٩

في الشكل المقابل هرم قاعدته مستطيلة الشكل تقع في المستوى س ص.
أبعادها ١٦ × ١٨ وحدة، وطول العمود النازل عليها من الرأس ط يساوي ٢٠ وحدة.
النقطة م هي نقطة منتصف $\overline{\text{و ط}}$، النقطة ن هي نقطة منتصف $\overline{\text{أ ط}}$،
النقطة و (٠، ٠، ٠)

أ أوجِد المسافة بين النقطتين م، ن.

ب أوجِد مجموع أطوال الأضلاع الثمانية للهرم، مقربًا إلى أقرب منزلتين عشريتَين.

ج إذا علمت أن قياس الزاوية بين $\overline{\text{و ط}}$، $\overline{\text{و ب}}$ يساوي: جتا$^{-1}$ $\frac{\sqrt{٢٩}}{\text{ك}}$. فأوجِد قيمة العدد الصحيح ك.

الحــلّ:

أ م ن = $\sqrt{(١٦ - ٨)^٢ + (٩ - ٩)^٢ + (١٠ - ١٠)^٢}$

= ٨ وحدات.

تقع النقطة م عند $\left(\frac{١٦}{٢}، \frac{١٨}{٢}، \frac{٢٠}{٢}\right)$ = (٨، ٩، ١٠)

تقع النقطة ن عند $\left(\frac{٣٢}{٢}، \frac{١٨}{٢}، \frac{٢٠}{٢}\right)$ = (١٦، ٩، ١٠)

ب مجموع الأطوال = ٦٨ + ٢٠ + $\sqrt{٧٢٤}$ + $\sqrt{٦٥٦}$ + ٢$\sqrt{٢٤٥}$ ١٤

= ١٧١٫٨٢ وحدة

محيط القاعدة = ٢(١٦ + ١٨) = ٦٨، ب ط = ٢٠

أ ط = $\sqrt{١٨^٢ + ٢٠^٢}$ = $\sqrt{٧٢٤}$

ج ط = $\sqrt{١٦^٢ + ٢٠^٢}$ = $\sqrt{٦٥٦}$

و ط = $\sqrt{١٦^٢ + ١٨^٢ + ٢٠^٢}$ = $\sqrt{٩٨٠}$ = ٢$\sqrt{٢٤٥}$

ج الزاوية ب و ط = جتا$^{-1}$ $\frac{\text{و ب}}{\text{و ط}}$

و ب = $\sqrt{١٦^٢ + ١٨^٢}$ = $\sqrt{٥٨٠}$ = ٢$\sqrt{١٤٥}$

و ط = $\sqrt{١٦^٢ + ١٨^٢ + ٢٠^٢}$ = $\sqrt{٩٨٠}$ = ٢$\sqrt{٢٤٥}$

= جتا$^{-1}$ $\frac{٢\sqrt{١٤٥}}{٢\sqrt{٢٤٥}}$

$\frac{\text{و ب}}{\text{و ط}}$ = $\frac{٢\sqrt{١٤٥}}{٢\sqrt{٢٤٥}}$

= جتا$^{-1}$ $\sqrt{\frac{١٤٥}{٢٤٥}}$

استخدم $\frac{\sqrt{\text{أ}}}{\sqrt{\text{ب}}}$ = $\sqrt{\frac{\text{أ}}{\text{ب}}}$

= جتا$^{-1}$ $\sqrt{\frac{٢٩}{٤٩}}$

الصورة الأبسط للكسر $\frac{١٤٥}{٢٤٥}$ هي $\frac{٢٩}{٤٩}$

= جتا$^{-1}$ $\frac{\sqrt{٢٩}}{٧}$

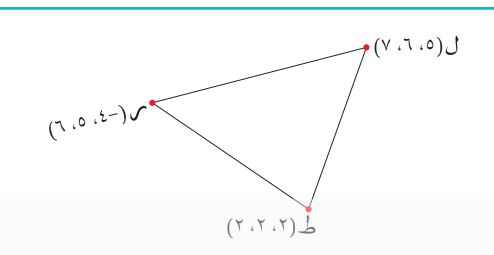
$\sqrt{٤٩}$ = ٧

∴ ك = ٧

مُساعَدة

اطوال الأضلاع الثلاثة للمثلث ب و ط معطاة، لذا يمكن استخدام الجيب، جيب التمام أو الظل لإيجاد قياس الزاوية ب و ط.

مثـــال ١٠



يمثّل الشكل المقابل منطقة مثلثية مستوية ط ل ر.

إذا علمت أن رؤوس المثلث هي: ط (٢، ٢، ٢)،

ل (٥، ٦، ٧)، ر (-٤، ٥، ٦)، فأوجد كلًا مما يأتي:

أ) طول كل ضلع من أضلاع المثلث ط ل ر.

ب) ق ($\hat{ط}$) مقربًا إلى أقرب منزلة عشرية.

ج) مساحة المثلث ط ل ر مقربة إلى أقرب منزلتَين عشريتَين.





الحـــلّ:

أ) ل ر $= \sqrt{(-٤ - ٥)^٢ + (٥ - ٦)^٢ + (٦ - ٧)^٢}$

$= \sqrt{(-٩)^٢ + (-١)^٢ + (-١)^٢}$

$= \sqrt{٨٣}$

استخدم نظرية فيثاغورث في الفضاء مع إيجاد الفرق بين إحداثيات س، ص، ع لكل زوج من النقاط.

ط ر $= \sqrt{(-٤ - ٢)^٢ + (٥ - ٢)^٢ + (٦ - ٢)^٢}$

$= \sqrt{(-٦)^٢ + ٣^٢ + ٤^٢}$

$= \sqrt{٦١}$

ط ل $= \sqrt{(٥ - ٢)^٢ + (٦ - ٢)^٢ + (٧ - ٢)^٢}$

$= \sqrt{٣^٢ + ٤^٢ + ٥^٢}$

$= \sqrt{٥٠}$ أو $٥\sqrt{٢}$

ب) جتا ($\hat{ط}$) $= \dfrac{(ط ر)^٢ + (ط ل)^٢ - (ل ر)^٢}{٢ \times ط ر \times ط ل}$

$= \dfrac{٦١ + ٥٠ - ٨٣}{٢ \times \sqrt{٦١} \times \sqrt{٥٠}}$

$= \dfrac{١٤}{٥\sqrt{١٢٢}}$

بما أن أطوال أضلاع المثلث معلومة، لذا يمكن استخدام قانون جيب التمام لإيجاد قياس الزوايا.

لاحظ أن (ل ر)^٢ =٨٣، (ط ر)^٢ =٦١، (ط ل)^٢ = ٥٠

ق ($\hat{ط}$) = جتا$^{-١}$ $\left(\dfrac{١٤}{٥\sqrt{١٢٢}}\right)$

= ٧٥,٣°

استخدم معكوس دالة جيب التمام لتجد ق (ل ط ر).

ج) مساحة المثلث ط ل ر = $\frac{١}{٢}$ × ط ر × ط ل × جا ($\hat{ط}$)

= $\frac{١}{٢}$ × $\sqrt{٦١}$ × $\sqrt{٥٠}$ × جا (٧٥,٣)

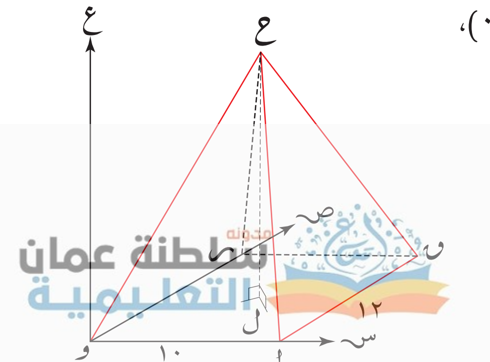
= ٢٦,٧١ وحدة مربعة.

مُساعَدة

مساحة المثلث أ ب ج

= $\frac{١}{٢}$ أ′ ب′ جا ج.

تمارين ١١-٣



١) الهرم و ط ن م ع قائم قاعدته مستطيلة الشكل، حيث و (٠، ٠، ٠)، و ط = ١٠ وحدات، ط ن = ١٢ وحدة.
ع ل عمودي على القاعدة عند ل حيث ل مركز القاعدة.

أ إذا علمت أن حجم الهرم ٦٥٦ وحدة مكعبة، فبيّن أن ع ل = ١٦,٤ وحدة.
(**حجم الهرم** = $\frac{1}{3}$ × **مساحة القاعدة** × **الارتفاع**)

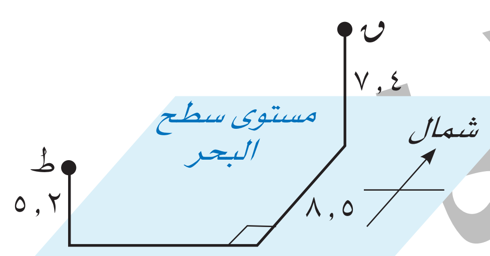
ب أوجد إحداثيات كل من:

١) ع　　　٢) نقطة منتصف $\overline{\text{و ع}}$

٣) نقطة منتصف $\overline{\text{ن ع}}$　　　٤) نقطة منتصف $\overline{\text{ع ط}}$

ج أوجِد قيم العدد الصحيح ك، إذا علمت أن طول المسافة من ن إلى نقطة منتصف $\overline{\text{و ع}}$ يساوي $\frac{\text{ك}}{١٠}$ وحدة.

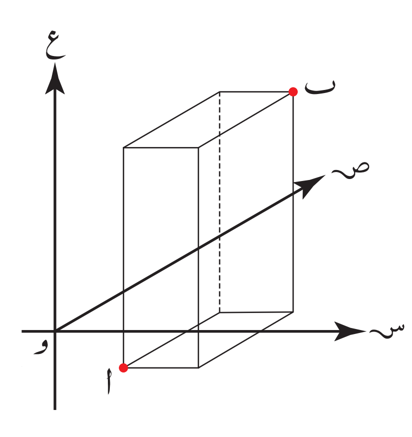
د إذا علمت أن قياس الزاوية المحصورة بين $\overline{\text{و ع}}$، $\overline{\text{ع ل}}$ يساوي جا$^{-1}$ $\frac{\sqrt{٦١}}{\sqrt{\text{أ}}}$، فأوجِد قيمة أ.



٢) ترتفع قمّتا جبل ط، ن عن سطح البحر ٥,٢ كم، ٧,٤ كم على الترتيب.
تقع القمّة ط على بُعد ٨,٥ كم جنوب القمّة ن، و ٩,٤ كم غرب القمّة ق أيضًا.

أ احسب طول المسافة بين القمّتَين مقربة إلى أقرب ١٠٠ متر.

ب احسب قياس زاوية الانخفاض من القمة ن إلى القمة ط مقربة إلى أقرب منزلة عشرية.

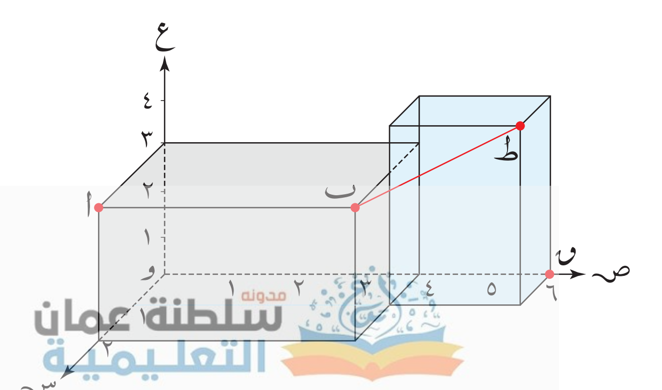


٣) طول أكبر قطر في متوازي المستطيلات المقابل = $\frac{٣٥}{٢}$ وحدة.
إذا علمت أن إحداثيات أ (٢، ٣، −٤)، ب (٢ + ك، $\frac{١١}{٢}$ + ك، ٣ك − ٤):

أ بيّن أن ١١ك^{٢} + ٥ ك − ٣٠٠ = ٠

ب أوجِد الجذر الموجب للمعادلة ١١ك^{٢} + ٥ ك − ٣٠٠ = ٠، ثم أوجِد إحداثيات نقطة منتصف أكبر قطر في متوازي المستطيلات.

٤) يبيّن الشكل المقابل متوازيَي مستطيلات فيهما وجهان متلامسان. تم تسمية الرؤوس الأربعة ا، ب، ط، ى.



أ) أوجد قياس الزاوية بين المستقيم و ا والجزء الموجب من المحور ع

ب) أوجد قياس الزاوية بين المستقيم و ب والمستوى س ص

ج) احسب:
١) إحداثيات نقطة منتصف $\overline{\text{ب ط}}$
٢) طول $\overline{\text{ب ط}}$

د) أوجد قياس الزاوية ط و ى، ثم احسب مساحة المثلث ط و ى مقربًا إجابتك إلى أقرب منزلتين عشريتين

رابط الكتروني

قد ترغب في حل بعض المسائل الهندسية مثل The spider and the fly في الموقع Underground Mathematics حول التفكير في الهندسة الجزء الأول من The spider and the fly



٥) إذا علمت ان رؤوس المثلث ط هـ ر هي: ط (٠، ٤، ٢)، هـ (٦، −١، ٠)، ر (−٢، −١، ٤)، وأطوال أضلاع المثلث ط هـ ر بترتيب تنازلي هي $\sqrt{\text{أ}}$، $\sqrt{\text{ب}}$، $\sqrt{\text{ج}}$ وحدة.

أ) أوجِد قيم أ، ب، ج، ثم استخدمها لتوضح أن المثلث ط هـ ر ليس قائم الزاوية.

ب) أوجِد أيّ زاوية من زوايا المثلث الثلاث الداخلية، ثم احسب مساحة المثلث ط هـ ر مقربًا إجابتك إلى أقرب منزلتَين عشريتَين.

١١-٤ المسلّمات والنظريات

المسلّمة Axiom هي عبارة اتُّفق على صحّتها دون الحاجة الى برهنتها أو إثباتها. تعتبر المسلّمات هي الحقائق الأساسية في كثير من المبرهنات أو القوانين الرياضية.

وبصورة عامة فللمسلّمات سمات، وهي:

- واضحة وسهلة الفهم.
- لا تحتوي على كلمات كثيرة تحتاج إلى توضيح.
- تتوافق المسلّمات بعضها مع بعض بحيث لا تتناقض فيما بينها.
- صحيحة عند استخدامها منفردة، بمعنى يمكن استخدامها بصورة مستقلة.

من الأمثلة على المسلّمات:

أي نقطتين مختلفتين في الفضاء يمر بهما مستقيم وحيد.

تم إثبات خطأ بعض المسلّمات بعد أن قبلت لزمن طويل، مثل مسلّمة أن الذرات غير قابلة للتجزئة.

هل تعلم؟

استخدام هذه المسلّمة وما يشابهها مكّن أقليدس (٣٢٥ قبل الميلاد – ٢٦٥ قبل الميلاد) على تشكيل فهم جديد للهندسة على مستوى العالم في بعض الأحيان تكون المسلّمات غير واضحة، ولكنها مطلوبة لنتيجتها. وخير دليل على ذلك مسلّمة أينشتاين القائلة بتساوي الكون في كل مكان – أي العالم متجانس – هذا النوع من المسلّمات ضرورية لجعل بعض الناتج العلمي ممكنًا، ولكن قد تتحوّل إلى معضلة لأنها ليست واضحة.

المسلمات الهندسية السبع

نص المسلّمة	الشكل التوضيحي
١) أي نقطتين يمر بهما مستقيم وحيد.	المستقيم ل، ط، م
٢) أي ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة يمر بها مستوى وحيد.	ب، ج، أ، ك
٣) كل مستقيم يحوي نقطتين على الأقل.	ل، ع، ط، م
٤) كل مستوى يحوي ثلاث نقاط على الأقل ليست على استقامة واحدة.	م، ن، ط، ل، ك
٥) إذا وقعت نقطتان في مستوى فإن المستقيم الوحيد المار بهما يقع كليًا في ذلك المستوى.	ب، أ، ل، ك
٦) إذا تقاطع مستقيمان، فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة فقط.	$ل_١$، م، $ل_٢$

نص المسلّمة	الشكل التوضيحي
٧) إذا تقاطع مستويان، فإنهما يتقاطعان في مستقيم.	ل، ع، س

النظرية theorem هي فكرة في الرياضيات يمكن إثباتها. يتم إثبات النظريات باستخدام المنطق والمسلّمات والنظريات الأخرى التي تم إثباتها بالفعل.

قد يكون من السهل ذكر النظرية، ولكن من الصعب إثباتها.

وخير مثال على ذلك هو نظرية فيرما الأخيرة، والتي تم ذكرها لأول مرة في عام ١٦٣٧م:

لا توجد ثلاثة أعداد صحيحة موجبة أ، ب، ج، تحقق المعادلة $أ^{ن} + ب^{ن} = ج^{ن}$ لأي قيمة صحيحة لـ ن أكبر من ٢

هذه النظرية برهنها العالم أندرو ويلس بعد ٣٧٥ عامًا وقد استغرق في برهانها ١٥٠ صفحة.

مساعدة

النظرية ليست هي نفسها الجانب النظري theory؛ الجانب النظري هو نظام من الأفكار يهدف إلى شرح شيء ما مثل حدث أو ظاهرة.

ثلاث نظريات هندسية مع براهينها

النظرية ١: إذا اشترك مستويان في نقطة، فإنهما يشتركان في مستقيم.

النظرية ٢: يشكّل مستقيم معلوم ونقطة خارجة عنه مستوى وحيدًا.

النظرية ٣: المستقيمان المتقاطعان يشكلان مستوى وحيدًا.

فيما يلي براهين للنظريات الثلاث:

النظرية ١: إذا اشترك مستويان في نقطة، فإنهما يشتركان في مستقيم.

شرح النظرية	شكل توضيحي	البرهان
المعطى: النقطة ا مشتركة بين المستوى س والمستوى ص. المطلوب: برهان أن المستويين يشتركان في مستقيم. الإجراءات: مدّ المستقيم ا ع إلى الجهة الأخرى من المستوى س	ع، ص، ب، س، ا، هـ، ى	المستقيم ا ع ⊂ المستوى ص، ∴ هـ ∈ ص. ب ∈ ص و هـ ∈ ص، ∴ ب هـ ⊂ المستوى ص. لكن النقطتين ب، هـ تقعان على جهتين مختلفتين من المستوى س. ∴ المستقيم ب هـ يقطع المستوى س في النقطة ى. ∴ تقع النقطتان ا، ى على المستوى س وكذلك تقعان في المستوى ص. ∴ يقع المستقيم ا ى في كلا المستويين س و ص

النظرية ٢: يشكّل مستقيم معلوم ونقطة خارجة عنه مستوى وحيدًا.

شرح النظرية	شكل توضيحي	البرهان
المعطى: مستقيم يمرّ بالنقطتَين ا، ب ونقطة ج لا تقع على استقامة واحدة مع ا و ب، المطلوب: برهان أن هناك مستوى وحيد يحوي هذا المستقيم والنقطة ج.	ا، ب، ج	نلاحظ أن النقطة ا ∋ المستقيم ا ب، النقطة ب ∋ المستقيم ا ب ولكن النقطة ج لا تقع على المستقيم ا ب، ∴ لا تقع النقاط ا، ب، ج على استقامة واحدة. ∴ النقاط ا، ب، ج تشكل مستوى وحيدًا.

النظرية ٣: المستقيمان المتقاطعان يشكلان مستوى وحيدًا.

شرح النظرية	شكل توضيحي	البرهان
المعطى: يحوي المستقيم $ل_1$ النقطتَين أ و هـ، يحوي المستقيم $ل_2$ النقطتَين أ و ج، المطلوب: برهان وجود مستوى وحيد يحوي $ل_1$ و $ل_2$	$ل_2$، $ل_1$، ا، ج، هـ	تقع النقطتان ا، هـ على المستقيم $ل_1$. تقع النقطتان ا، ج على المستقيم $ل_2$. ∴ لا تقع النقاط ا، ج، هـ على استقامة واحدة. ∴ تشكل النقاط ا، ج، هـ مستوى وحيدًا.

استكشف ٤

ناقش العبارة 'يمكن احتواء أي مستقيمين في مستوى وحيد'.

هناك ثلاث حالات يجب أخذها في الاعتبار عند التفكير في المستقيمَين في الفضاء:

١) قد يكونان متقاطعَين،

٢) قد يكونان متوازيين،

٣) قد يكونان غير متقاطعَين وغير متوازيَين 'متخالفان'.

مثــال ١١

اشرح بأسلوبك الخاص، كيف تعرف أن العبارة الآتية خاطئة عندما ن = ٣:

يحدد الحجم أو الفضاء بـ ن نقطة على الأقل

الحـلّ:

تعني عبارة 'على الأقل ٣ نقاط' ثلاثة نقاط أو أكثر.

لشرح أن العبارة المعطاة خاطئة، نحن بحاجة إلى أن نبرهن أن العبارة 'يحدد الفضاء بـ ٣ نقاط' هي عبارة خاطئة.

هناك حالتان مختلفتان يجب الالتفات إليهما بالنسبة إلى النقاط الثلاث:

الحالة ١: تقع النقاط الثلاث على استقامة واحدة.

إذا وقعت ٣ نقاط على استقامة واحدة فإنها تقع على مستقيم وحيد.

المستقيم هو شكل لديه بُعد واحد وليس له حجم.

الحالة ٢: لا تقع النقاط الثلاث على استقامة واحدة.

أيّ ٣ نقاط لا تقع على استقامة واحدة يمرّ بها مستوى وحيد.

المستوى هو شكل لديه بُعدان وليس له حجم.

خلاصة

العبارة 'يحدد الحجم أو الفضاء بـ ن نقطة على الأقل' خاطئة عندما ن = ٣

تمارين ١١-٤

١) اقرأ بعناية العبارات المرافقة لكل من الرسوم الثمانية الآتية.

بعض هذه العبارات يمكن إثباتها وبعضها الآخر لا يمكن ذلك، لكنها جميعها عبارات صحيحة.

باستخدام أسلوبك الخاص، اشرح بإيجاز كيف تعرف أن كلًا من هذه العبارات صحيحة.

يمكنك استخدام أي من المسلّمات أو النظريات في التفسيرات الخاصة بك، ولكن لا تقم بنسخها حرفيًا:

أ مستقيم وحيد يحوي النقطتَين ف، ت

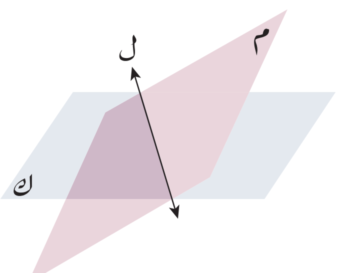
ت
ف

ب مستوى وحيد يحوي النقاط الثلاث ط، س، ن





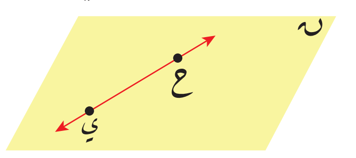
ج يتقاطع المستويان ك، م في المستقيم ل



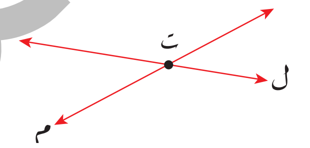


د المستقيم يِ ع يقع في المستوى ں

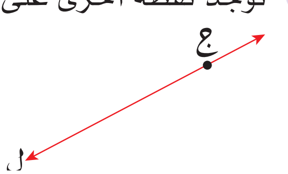




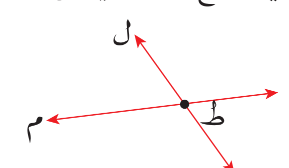
هـ مستوى وحيد يحوي المستقيمَين ل، م المتقاطعَين في النقطة تَ



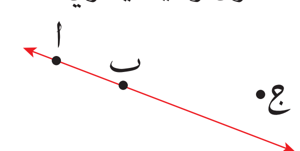
و توجد نقطة أخرى على المستقيم ل بجانب النقطة ع



ز يتقاطع المستقيمان ل، م في النقطة ط فقط.

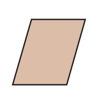


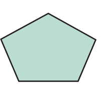
ح مستوى وحيد يحوي المستقيم أ ب، والنقطة ع

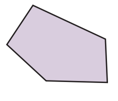


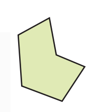
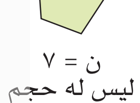
٢) قرأ يونس العبارة الآتية:
يحدد الحجم أو الفضاء بـ ن نقطة على الأقل.

أ يدّعي يونس أنه لا توجد قيمة لـ **ن** تكون عندها العبارة صحيحة.
إليك بعض الرسوم التي استخدمها كأدلة لتبرير ادعائه.







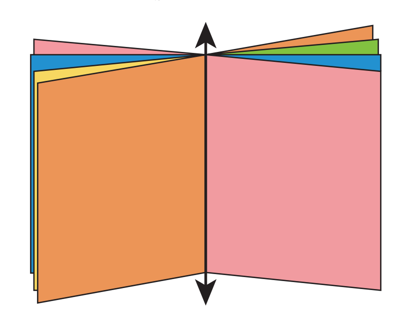





ما رأيك في أدلة يونس؟
ماذا تقترح عليه؟

ب توجد قيمة واحدة لـ **ن** لتكون العبارة صحيحة:
١) ما هي هذه القيمة؟
٢) على مستوى إحداثي ثلاثي الأبعاد: حدّد نقاطًا، وارسم شكلًا له حجم لتدعم إجابتك للجزئية (١).

٣) أعط مبررات سبب دعم الشكل أدناه للعبارة الآتية:
'يوجد عدد لا نهائي من المستويات تمر بنقطتَين'.



٤) اكتب إحداثيات أي ثلاث نقاط تقع في المستوى الذي يحوي المستقيم الذي يمرّ بالنقطتَين ط (٤، ٠، ٥) ، ف (−٢، ٠، ٥)، ويحوي أيضًا النقطة س (٧، ٠، −٣).

٥) أعط مثالًا من واقع الحياة اليومية لموقف يدعم العبارتَين الآتيتَين:

١) 'يحوي المستوى ثلاث نقاط مختلفة على الأقل ليست على استقامة واحدة.'
٢) 'إذا وقعت نقطة خارج المستقيم، فإنه يوجد مستوى وحيد يحوي المستقيم والنقطة'.

يمكنك استخدام الرسوم التي تساعدك على تفسير الموقف أو المواقف التي اخترتها.

قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

نقطة المنتصف

نقطة منتصف القطعة المستقيمة التي إحداثيات نهايتَيها هما (س$_1$، ص$_1$، ع$_1$)، (س$_2$، ص$_2$، ع$_2$)

هي: $\left(\frac{س_1 + س_2}{2}، \frac{ص_1 + ص_2}{2}، \frac{ع_1 + ع_2}{2}\right)$.

المسافة بين نقطتَين

طول أكبر قطر في متوازي مستطيلات أبعاده أ، ب، جـ وحدة = $\sqrt{أ^2 + ب^2 + جـ^2}$.

للقطعة المستقيمة الواصلة بين ا (س$_1$، ص$_1$، ع$_1$)، ب (س$_2$، ص$_2$، ع$_2$)، والتي نقطة منتصفها م يكون:

- ا ب = $\sqrt{(س_1 - س_2)^2 + (ص_1 - ص_2)^2 + (ع_1 - ع_2)^2}$
- ا م = م ب = $\frac{1}{2}$ ا ب = $\frac{1}{2}\sqrt{(س_1 - س_2)^2 + (ص_1 - ص_2)^2 + (ع_1 - ع_2)^2}$

المسلّمات الهندسية السبع

١) أي نقطتين يمر بهما مستقيم وحيد.

٢) أي ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة يمر بها مستوى وحيد.

٣) كل مستقيم يحوي نقطتين على الأقل.

٤) كل مستوى يحوي ثلاث نقاط على الأقل ليست على استقامة واحدة.

٥) إذا وقعت نقطتان في مستوى، فإن المستقيم الوحيد الذي يمرّ بهما يقع كليًا في ذلك المستوى.

٦) إذا تقاطع مستقيمان، فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة فقط.

٧) إذا تقاطع مستويان، فإنهما يتقاطعان في مستقيم.

ثلاث نظريات هندسية

النظرية ١: إذا اشترك مستويان في نقطة، فإنهما يشتركان في مستقيم.

النظرية ٢: يشكّل مستقيم معلوم ونقطة خارجة عنه مستوى وحيدًا.

النظرية ٣: المستقيمان المتقاطعان يشكلان مستوى وحيدًا.

تمارين مراجعة نهاية الوَحدة الحادية عشرة

١) دون استخدام الآلة الحاسبة، أوجِد طول القطعة المستقيمة الواصلة بين أزواج النقاط الآتية:

أ (٠، ٠، ٠) ، (٧، ٠، ٠)

ب (١، ٢، ٣) ، (١، ٥، ٣)

ج (−٢، ٥، ١١) ، (−٢، ٥، ٢)

٢) استخدم الآلة الحاسبة لتجد طول المسافة بين أزواج النقاط الآتية مقربًا إجابتك إلى أقرب منزلتَين عشريتَين:

أ (١، ٢، ٣) ، (٢، ٣، ٤)

ب (٥، ١، ٠) ، (٧، ٤، −١)

ج (٨، −٤، −٧) ، (١، ٥، ٦)

٣) متوازي مستطيلات أبعاده ٦,٥ سم، ٦,٦ سم، ٤,٢ سم.

أوجِد طول أكبر قطر لمتوازي المستطيلات مقربًا إلى أقرب منزلتَين عشريتَين.

٤) إحداثيات رؤوس قاعدة هرم قائم هي: أ(٠، ٠، ٠)، ب(٦، ٠، ٠)، ج(٦، ٠، ٤)، ى(٠، ٠، ٤).

أ ما شكل قاعدة الهرم؟

ب أوجِد المسافة بين كل رأس من رؤوس القاعدة مع رأس الهرم ع (٣، ٨، ٢).

٥) ورشة صيانة طائرات على شكل متوازي مستطيلات. أبعاده: الطول ٤٠ مترًا، العرض ١٢٠مترًا، والارتفاع ١٦ مترًا.

أ أحسب الفرق بين طول القطر الأكبر وعرض الورشة بالأمتار مقربًا إلى أقرب منزلتَين عشريتَين.

ب قُسّمت الورشة إلى ٢٠ منطقة عمل متطابقة، أبعاد كل منطقة: الطول رُبع طول الورشة، والعرض خُمس عرض الورشة، والارتفاع هو ارتفاع الورشة نفسه. أوجِد في أبسط صورة طول أكبر قطر لكل منطقة عمل.

٦) أيّ مسلّمة هندسية أو نظرية يمكن تدعيمها عند مشاهدة عشر كرات قدم في أرضية ملعب منبسط؟

٧) أيّ مسلّمة هندسية أو نظرية يمكن تدعيمها عند مشاهدة شرطي سير ينظّم حركة السير عند تقاطع طريقَين مستقيمَين؟

٨) اذكر فرقًا واحدًا بين النقطة والمستقيم.

٩) اذكر تشابهًا واحدًا بين المستقيم والمستوى.

١٠) إحداثيات رؤوس مثلث هي: ع (٤، ٠، ٠)، ں (٠، ٤، ٠)، ل (٠، ٠، ٨).

أ على نظام ثلاثي الأبعاد، ارسم شكلًا يمثل المثلث، وسمّه.

ب بيّن أن المثلث ع ں ل متطابق الضلعَين.

ج احسب مساحة المثلث ع ں ل.